JOHN SCHOU · KRISTINE JESS
HANS CHRISTIAN HANSEN · JEPPE SKOTT

MATEMATIK FOR LÆRERSTUDERENDE

TAL, ALGEBRA OG FUNKTIONER

4.-10. KLASSE

Samfunds
litteratur

John Schou, Kristine Jess, Hans Christian Hansen og
Jeppe Skott

Matematik for lærerstuderende

Tal, algebra og funktioner
4.-10. klassetrin

Samfundslitteratur

John Schou, Kristine Jess, Hans Christian Hansen og Jeppe Skott
Matematik for lærerstuderende
Tal, algebra og funktioner
4.-10. klassetrin

Omslag: Annette Borsbøl, Imperiet
Tegninger: John Schou
Forlagsredaktion: Ole Jørgensen
Projektledelse: Thomas Bestle

Sats og tryk: Narayana Press, Gylling

Printed in Denmark, 2014

1. udgave, 2. oplag 2014
ISBN trykt bog 978-87-593-1795-2
ISBN e-bog 978-87-593-2339-7

Samfundslitteratur
Rosenørns Alle 9
1970 Frederiksberg C
Tlf. 3815 3880
Fax 3535 7822
www.samfundslitteratur.dk

INDHOLD

FORORD

Matematik for lærerstuderende har, siden det vandt lærebogsprisen i 2006, været et udbredt system for linjefagene i matematik på læreruddannelserne i Danmark, og de centrale bøger i systemet er oversat til svensk. Udgangspunktet i 2006 var meget ambitiøst på grund af det nye store timetal i matematik. I anledning af den seneste reform LU13 er omfanget reduceret drastisk, men det høje ambitionsniveau er fastholdt, hvad angår de kvalifikationer, der retter sig mod den lærerstuderendes fremtidige profession.

I overensstemmelse med LU13 tilbyder vi til undervisningsfaget matematik 4.-10. klasse følgende bøger i systemet: Tal, algebra og funktioner 4.-10. klasse; Geometri 4.-10. klasse; Stokastik 1.-10. klasse; Delta, Fagdidaktik; My, Elever med særlige behov. Til den studerende, der føler behov for at opdatere sin faglighed inden studiestart, har vi udviklet materialet Alfa, Forstudier.

"Tal, algebra og funktioner 4.-10. klasse" præsenterer fagligt og fagdidaktisk materiale samt tilhørende arbejdsopgaver af et omfang, der på de fleste læreruddannelser vil svare til to moduler efter LU13. Bogens første del omhandler *Talsystemer og regneprocesser* og den anden del *Algebra, funktioner og modellering*. Den såkaldte stofdidaktik, der er knyttet til bogens faglige emner, findes i særlige kapitler her i bogen, mens det fagdidaktiske stof, der er fælles for al matematikundervisning, skal søges i bogen Delta.

I hvert kapitel er de vigtigste mål angivet i starten, og kapitlet rundes af med en opsamling, der muliggør en evaluering af udbyttet. De matematiske kompetencer står centralt både i LU13 og i det aktuelle faghæfte for grundskolen, derfor fremhæver vi i hvert kapitel, hvilke kompetencer der især kan udvikles gennem arbejdet. Den studerende vil gennem arbejdet med de tre matematikfaglige bøger være kommet godt omkring alle otte matematiske kompetencer.

Programmel, it

Vi inddrager i høj grad it, og vi benytter gratis og frit tilgængelige ressourcer, som også i vid udstrækning er platformsuafhængige. Vores valg er faldet på:

GeoGebra (http://www.geogebra.org),

wxMaxima (http://andrejv.github.com/wxmaxima),

Windows-baserede Microsoft Mathematics (http://www.microsoft.com/education/ww/products/Pages/mathematics.aspx).

Desuden inddrager vi regneark, diverse hjemmesider og en række ressourcer, der kun er tilgængelige på nettet.

Der findes svarforslag til udvalgte opgaver på bogens hjemmeside www.samfundslitteratur.dk/mat, ligesom en liste over de trykfejl, vi bliver opmærksomme på, vil kunne findes på denne hjemmeside under errata.

København, maj 2013
John Schou, Kristine Jess, Hans Christian Hansen og Jeppe Skott

DEL I
TALSYSTEMER OG REGNEPROCESSER

INTRODUKTION

Eleven på mellemtrinet har allerede lært simpel addition og subtraktion, men forude venter næste mål, hvor eleven skal kunne gange og dividere. Det er ikke så let at undervise i for en matematiklærer, så er der ingen vej uden om at genopleve den intellektuelle kamp, barnet skal igennem med fuldt ud at forstå titalssystemet og forsøge sig med sine første beregninger. Det kan godt være, at læseren bliver frustreret i kapitlet *Genoplev kampen med at forstå positionssystemet*, hvor vi har konstrueret den mærkelige verden Alfabetaland og andre afvigende positionssystemer, men det tjener et pædagogisk formål. I det efterfølgende kapitel *At gange og dividere med flercifrede tal* præsenterer vi egne observationer og international forskning om børns multiplikation og division med flercifrede tal.

Vi præsenterer så tallenes historie fra oldtiden til renæssancen i et særskilt kapitel, fordi man i den historiske udvikling af tallene kan hente stor inspiration til arbejdet med at udvikle børns talbegreber, selv om det ikke altid er sandt, at de tidlige historiske erkendelser modsvarer tidlige stadier i børns udvikling. Historien føres dernæst op til vores tid i kapitlet *Læremidler fra regnebog til CAS*, der via overvejelser om moderne teknologis rolle som værktøj såvel som læremiddel munder i ud overvejelser om valg af læremidler.

Eleverne på mellemtrinet skal lære at regne med brøker og negative tal. Derfor indeholder kapitlerne *De positive rationale tal*, *Brøkregning i den fagdidaktiske skole RME* og *Negative tal og repræsentationer* aktuelt stof for den lærerstuderende. Det drejer sig først og fremmest om at få kendskab til forklaringer på, hvorfor man regner med brøker og negative tal, som man gør. Via et forskningsresultat fra RME får læseren uddybet den centrale rolle, som repræsentationer har i matematikken og i matematikundervisningen.

På afsluttende trin arbejdes der videre med brøker og negative tal, men også de irrationale tal kommer på banen, så eleven når frem til den mest omfattende talmængde, der findes i grundskolen, de reelle tal. Vi skriver om dem allerede i kapitlet om tallenes historie, imidlertid er selve det at bevise, at der findes irrationale tal, fagligt ret krævende og indgår som afrunding af kapitlet om *Talteori og matematisk tankegang*, hvor vi også ser på primtalsopløsning og forskellige bevisteknikker.

De komplekse tal, der indgår som obligatorisk stof i LU13 behandles i et særskilt kapitel i bogen. Det giver god mening for en matematiklærer at kende til disse tal, da man hermed bliver klædt på til at besvare spørgsmål, der rækker ud over de reelle tal.

1

GENOPLEV KAMPEN MED AT FORSTÅ POSITIONSSYSTEMET

I den klassiske regneundervisning indtog de fire regningsarter udført efter nøje beskrevne metoder (algoritmer) på tal opskrevet i et positionssystem med 10 som grundtal en dominerende rolle. Den nyere matematikundervisnings princip om, at eleven skal være medkonstruktør af disse algoritmer, kræver en større faglighed af læreren og et bredere syn på såvel positionssystemer som mulige regnemetoder. Derfor er det hensigten, at læseren efter arbejdet med dette kapitel:

- Har genoplevet barnets kamp med og frustration over at sætte sig ind i en fremmed talverden.
- Danner sig personlige refleksioner over såvel positionssystemer som regnemetoder i fremmedartede positionssystemer.
- Teknisk behersker at regne i et talsystem med fremmed base og kan omskrive et tal fra én base til en anden.

Det at kunne skifte mellem forskellige måder at skrive tal op på udgør en lille, men væsentlig del af repræsentationskompetencen.

ALFABETALAND

Fra talbegrebets historie har vi lært, at det meste omkring tallenes udseende og grundlæggende regnemetoder er kulturbestemt. Det har inspireret os til at konstruere en fantasiverden i øvelse 1, som dog er lidt påvirket af tidlig græsk talnotation og nogle generelle principper, der genfindes i mange kulturer.

Vi har kaldt denne fantasiverden for *Alfabetaland* og inviterer nu læseren til at lære sig at tælle og regne på ny i dette lands noget anderledes kultur.

Målet hermed er at give læseren en ret enestående mulighed for at genopleve nogle af de vanskeligheder, som et barn oplever i mødet med tal og talbehandling i skolen.

Faktisk bør opgaven starte med en ren mundtlig indgang til tælleremsen i Alfabetaland, hvor læreren har tilrettelagt lege med tælleremsen. En efterligning kan foregå ved at tælle rundt på holdet, således at førstemand siger 'alfa', den næste 'beta' osv. For at legen skal svare til virkeligheden i børns udvikling, er det vigtigt, at tællelegen i begyndelsen foregår uden adgang til skrift og læsning.

Øvelse 1

Hvad nu, hvis vi talte således:

alfa, beta, gamma, delta, alfem,

alfemalfa, alfembeta, alfemgamma, alfemdelta, betem,

betemalfa, betembeta, betemgamma, betemdelta, gammem,

osv. (hvad det så helt præcist vil sige)

– og hvad, hvis vi skrev det således op:

α, β, γ, δ, αο,
αα, αβ, αγ, αδ, βο,
βα, ββ, βγ, βδ, γο,
γα, …

- kunne du så:
- tælle til deltem?
- tælle antallet af mønter i din pung?
- i hovedet udregne alfemgamma plus alfemgamma?
- skriftligt udregne αβ + αγ?
- tælle videre i tælleremsen længere fremme: deltemalfa, deltembeta, deltemgamma, deltemdelta, alfun, alfunalfa, alfunbeta, …?
- skrive videre i samme række: δα, δβ, δγ, δδ, αοο, αοα, αοβ?
- skrive den lille gangetabel op i Alfabetalandnotation?
- klare lidt mere komplekse beregninger som δα + αδγ og δβ × δγ og nogle, du selv formulerer?

Overvej/diskuter 1

Før vi igen forlader Alfabetaland vil det være nærliggende at gøre sig nogle overvejelser over, hvor meget situationen ligner den, barnet møder i skolens matematikundervisning. Og om der er aspekter af den tidlige talbehandling, I via besøget i Alfabetaland er blevet særlig opmærksomme på.

FORDELENE VED POSITIONSSYSTEMER

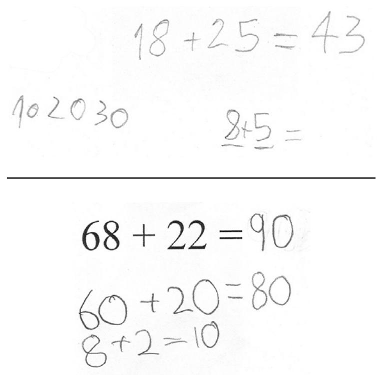
Vi kommer i kapitlet om tallenes historie til at se, at man kan konstruere symboler for tal på mange måder. I de ældste systemer blev man nødt til at opfinde nye symboler, efterhånden som man fik brug for større tal. Fx i romertal hvor de første titalspotenser hedder I, X, C, M. Umiddelbart kan det se kortere og mere praktisk ud end vores nutidige notation i titalssystemet 1, 10, 100, 1000, men den fordel sættes i skyggen af, at et tal som 444 skal skrives som CDXLIV eller efter en tidlig udgave af romertal CCCCXXXXIIII.

Fordelen ved vores system er også, at det er let at lave symboler for de næste titalspotenser 10.000 og 100.000, mens de gamle romere måtte finde på nye symboler. Dog ser man i deres symboler $\overline{\text{X}}$ for 10.000 og $\overline{\text{C}}$ for 100.000, at også romerne satte pris på det genbrugsprincip, der er i positionssystemer.

Den anden fordel ved positionssystemet er måske endnu mere indlysende i skolesammenhæng: de effektive regnealgoritmer, som vores positionssystem lægger op til.

Det er sådan, at hvis man først har lært at regne med cifre (forstået som enere) i regninger som 2 + 3 = 5, 7 + 2 = 9 og 7 + 8 = 15, kan disse beregninger lige så godt fortolkes som beregninger med tiere, således at fx 2 + 3 = 5 læses som: "to tiere og tre tiere giver fem tiere". Så vores tre regnestykker kan i positionssystemets logik umiddelbart overføres til 20 + 30 = 50, 70 + 20 = 90 og 70 + 80 = 150. For den, som har begrebet princippet, kan det også fortolkes som beregninger med hundreder: 200 + 300 = 500, 700 + 200 = 900 og 700 + 800 = 1500.

Den, der har forstået princippet i vores positionssystem og kan addere enere, kan derfor også klare en beregning som 772 + 823, fordi opgaven fx oversættes til 2 + 3 og 70 + 20 og 700 + 800, hvilket ifølge det ovenstående giver 5 enere, 9 tiere og 15 hundreder, hvilket giver 5 + 90 + 1500, der ifølge positionssystemets princip er 1595. Når børn udvikler deres egne algoritmer, vil denne store fordel ved positionssystemet ofte være indarbejdet (jf. elevbesvarelse fra 2. klasse i figur 1), eller også vil læreren med tiden gøre eleven opmærksom på fordelen ved det.



Figur 1.

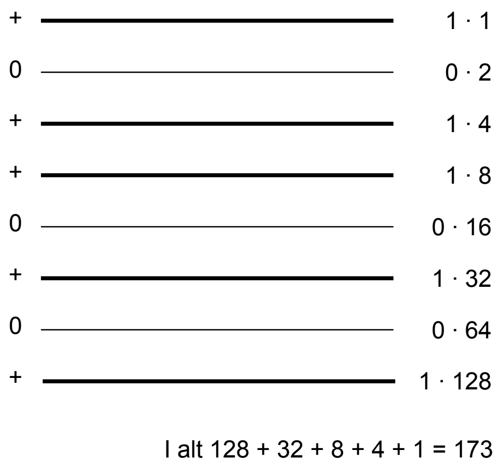
POSITIONSSYSTEM MED VILKÅRLIGT GRUNDTAL

I nogle sammenhænge er det også en fordel ved positionssystemer, at man kan konstruere et positionssystem med et vilkårligt valgt grundtal. I forbindelse med fremkomsten af elektronisk databehandling var det således en fordel, at man kunne vælge et positionssystem med kun to cifre, 0 og

1. På denne måde kunne man repræsentere tal ved elektriske spændinger i ledninger. Hvis der var spænding på en ledning, skulle det svare til 1, og hvis der ikke var spænding, skulle det svare til 0. Prisen for at benytte et sådant totalssystem (binært talsystem) er, at 'tierovergangen' allerede kommer ved 2, så der skal en ny ledning til for at holde øje med, hvor mange toere man har, en til at holde øje med firere og en til ottere, således at fire ledninger ved siden af hinanden ved passende spændinger kan repræsentere et tal som 1101 i totalssystemet. Dette tal skal fortolkes som $1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$, der svarer til 13 i vores foretrukne titalssystem.

Eksempel 1

En byte
I forbindelse med computerteknologien ville man gerne have tal nok til rådighed til at kunne nummerere alle de tegn, der findes på et tastatur. Så det var ikke nok med fire ledninger ved siden af hinanden. Man måtte op på et 'lakridsbånd' med otte ledninger (figur 2), hvilket kunne repræsentere tal op til 255. Fx kan tallet 173 repræsenteres ved hjælp af spænding i 8 ledninger som:



Figur 2. En byte repræsenteret ved ledninger.

I informationsteorien kaldes sådan en sekvens med 8 binære cifre for en 'byte' information.

Øvelse 2

Oversæt følgende tal skrevet i totalssystemet til titalssysstemet: a = 111101 og b =10101010.

Prøv at addere a og b i totalssystemet, idet du efterligner metoder fra skolen. Kontroller eventuelt summen ved at oversætte til titalssystemet. Udregn derefter $b - a$ i totalssystemet.

Definition

Hvis man vil skrive et tal i *base g*, skal man råde over cifre for tallene 0, 1, 2, 3, …, $g - 1$. Størrelsen af et tal skrevet i base g, altså med *grundtallet g*, defineres ved:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \,(\text{base } g) = a_n \times g^n + a_{n-1} \times g^{n-1} + \dots + a_2 \times g^2 + a_1 g^1 + a_0 .$$

Eksempel 2

Hvis vi moderniserer Alfabetalands system lidt ved at indføre arabertal, så 1 = α, 2 = β, 3 = γ, 4 = δ og 0 = ο, så har man i Alfabetaland indført et positionssystem med grundtallet 5. Hvis man vil omregne mellem base fem og base ti, så kan man blive forvirret, hvis ikke der ved hvert talnavn er angivet, om det faktisk er i den ene eller den anden base. I den situation bruger man romertal til at angive base, fx $1001_{II} = 8_X + 1_X = 9_X$ og 4132_V kan i base X omskrives til $4 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 = 500 + 25 + 15 + 2 = 542$, dvs. $4132_V = 542_X$.

Hvis man omvendt har tal som 432 opskrevet i base X og vil have det udtrykt i base V, så må man først bestemme den største femmerpotens, der kan hentes ud af 432. Da de relevante potenser af 5 i base X er 1, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, ser vi, at den størst mulige er $5^3 = 125$. Den går tre hele gange op i 432, hvorfor cifferet i base V, svarende til denne position (a_3), skal være 3.

Til rest er nu $432 - 3 \times 125 = 432 - 375 = 57$. For at finde a_2, måler vi, hvor mange gange vi kan tage 25 ud af 57. Vi finder $a_2 = 2$.

Til rest er nu $57 - 2 \times 25 = 57 - 50 = 7$. For at finde a_1, måler vi, hvor mange gange vi kan tage 5 ud af 7. Vi finder $a_2 = 1$. Og der er 2 enere til rest, hvilket giver $a_0 = 2$.
Resultatet bliver $432_X = 3212_V$.

Hvis man vil opstille en algoritme ud fra fremgangsmåden, kan beregningen med fordel skrives skematisk op:

Rest (i base X)	Potens (i base X)	Ciffer/kvotient	Forbrug
432	125	3	375
57	25	2	50
7	5	1	5
2	1	2	2
0	Svar: 3212 (i base V)		

Øvelse 3

Skriv 41322_V i base X.
Skriv 9823_X i base V.
Skriv 6512_{VII} i base X.
Skriv 6512_{VII} i base II.

Øvelse 4

Hvis man vælger baser med grundtal højere end 10, bliver man nødt til at opfinde cifre for 10, 11 og evt. flere følgende tal. I datalogi regner man ofte i et 16-talssystem, hvor cifrene efter 9 hedder: A, B, C, D, E, F, mens 16_X selvfølgelig hedder 10 i 16-talssystemet eller det *hexadecimale talsystem*, som det også kaldes.

1) Skriv 2EF i det hexadecimale talsystem i base X.

2) Vis i det hexadecimale talsystem, at ABE + BAD > FED.

3) De hexadecimale tal i en computer dukker sjældent frem til brugerfladen, men man kan dog opleve adresser som http://en.wikipedia.org/wiki/Main%20Page. Her ville syntaksen for URL-adresser ikke acceptere et mellemrum mellem Main og Page og skrev derfor i stedet nummerkoden (ASCII) for mellemrum netop i en hexadecimal kode. Hvad er nummerkoden 20 for mellemrum oversat til titalssystemet?

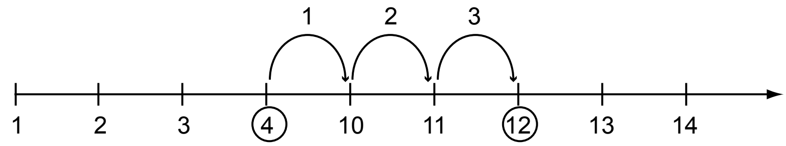
REGNEALGORITMER I ANDRE TALSYSTEMER

For en lærerstuderende giver arbejdet med regning i andre talsystemer en mulighed for at genopleve den lange læreproces, der fører frem til beherskelse af de fire regningsarter. Processer, der er blevet helt automatiserede i de lærte algoritmer, taber ved regning i andre talsystemer karakteren af at være indlysende. Man bliver nødt til at reflektere meget bevidst over, hvad det er, man gør i disse automatiserede processer, og derved kan man blive bedre til at forstå elevernes problemer og overvejelser.

Vi vender tilbage til Alfabetaland for at regne i base V, men i en version, der er lidt tættere på det velkendte, idet vi anvender vores kendte 'arabertal'. Prøv indledningsvis at udfordre dig selv med følgende regneopgaver, idet det er forbudt at oversætte til titalssystemet og lave beregningerne der:

$324_V + 143_V$ $\qquad$ $324_V - 143_V$ $\qquad$ $324_V > 143_V$ $\qquad$ $114042_V : 324_V$

Hvis man skal efterligne metoder kendt fra titalssystemet, så er det første, man kommer til at savne, tabellerne. Fx får man i den første addition brug for at lægge enerne sammen 4 + 3. Det er klart, at hvis man kender tælleremsen i femtalssystemet, så kan man simpelthen tælle 3 frem fra 4:



Figur 3.

På denne måde kan man også konstruere den lille tabel for addition og evt. lære den udenad, hvis man vil være hurtig til at regne i dette talsystem, men det er nok mere realistisk, at man vil 'slå op' i tabellen, ligesom i skoletiden.

Øvelse 5

Opstil den lille tabel for addition i femtalssystemet ved at udfylde de manglende pladser i tabellen på næste side.

+	0	1	2	3	4
0					4
1		2	3		
2			4		
3					
4					13

Nu, hvor vi råder over den lille additionstabel, kan den også bruges til at addere femmere og femogtyvere efter samme princip, som vi så i afsnittet om fordelene ved positionssystemer, så $224_V + 143_V$ ses ved opslag i tabellen at give:
12_V enere, 11_V femmere og 3 femogtyvere, hvilket er det samme som
2 enere, 12_V femmere og 3 femogtyvere, hvilket er det samme som
2 enere, 2 femmere og 4 femogtyvere, hvilket er det samme som
422_V.

Øvelse 6

Udregn ved hjælp af tabellen $4324_V + 1324_V$.
Undersøg, hvordan additionstabellen også kan anvendes som en subtraktionstabel og benyt den til at udregne
$224_V - 143_V$ og $4324_V - 1324_V$.

Øvelse 7

Prøv at beregne $21_V \times 13_V$, $24_V \times 43_V$ og $32_V \times 33_V$ ved at udnytte den metode, du benytter til at multiplicere tal i titalssystemet.

Øvelse 8

I dine udregninger i øvelse 7 kom du sikkert til at savne den lille multiplikationstabel.

Opstil den lille multiplikationstabel for femtalssystemet.

×	1	2	3	4
1		2		
2		4	11	
3				
4		13		

Øvelse 9

Prøv, om du kan overføre den metode, du bruger til at multiplicere tal i titalssystemet, til femtalssystemet ved fx at beregne $324_V > 143_V$.

Hvis det volder vanskeligheder, kan du blive nødt til – som børnene i skolen – at tænke mere bevidst på at udfolde regnestykket til $(300_V + 20_V + 4) > (100_V + 40_V + 3)$ og på ny genfinde simple regler, der svarer til fx “man ganger med 10 ved at sætte et nul bagefter”.

Øvelse 10

Skriv en forklaring på, hvordan man ganger to tal med hinanden i femtalssystemet. Forklaringen skal henvende sig til børn i 3.-4. klasse i et land, hvor tallene er skrevet i base V.

Øvelse 11

Som bekendt er division meget vanskeligere end multiplikation, fordi man i langt højere grad skal gætte på, hvor mange gange divisor går op i tallene i de delberegninger, der forekommer undervejs. Når divisor er encifret, kan man dog bruge gangetabellen som en slags divisionstabel. Prøv fx at udregne $1102_V : 4$ ved hjælp af gangetabellen. Resultatet bliver 123_V.

Men allerede ved tocifrede tal bliver det noget vanskeligere. Prøv fx $2321_V : 12_V$. Resultatet bliver 143_V.

Prøv derefter med divisionsopgaven fra indledningen til dette afsnit $114042_V : 324_V$. Resultatet bliver 143_V.

Opstil to divisionsopgaver i base V, opgaver som, du er sikker på, ‘går op’. Udveksl opgaverne med medstuderende.

Øvelse 12

Det er let at se på et tal som 34560 i base X, at både 2 og 5 går op i tallet. Kan man let se på et tal som fx 234320_V i base V, om både 2 og $5 = 10_v$ går op?

Øvelse 13

Det har skabt revolution i meget regnearbejde i og uden for skolen, at den elektroniske lommeregner blev opfundet. Hvordan i al verden kan man få elektriske strømme til at udføre et regnearbejde? Sandsynliggør, at det ikke er så svært at forestille sig, når man ved, at lommeregnerne benytter totalssystemet: Skriv den lille additionstabel og den lille multiplikationstabel op i base II, og udfør selv nogle beregninger som $11011_{II} + 10110_{II}$ og $11011_{II} \times 10110_{II}$.

OPSAMLING PÅ KAPITEL 1

Det væsentligste mål med dette kapitel var at bringe læseren i elevens sted i forhold til kompleksiteten i positionssystemet og regnealgoritmerne. Dertil kommer, at læseren i sit arbejde måske vil få brug for teknisk at kunne begå sig i andre talsystemer og bl.a. kende til betydningen af det binære system i computerteknologien.

Beskriv ved hvert punkt fra indledningen til dette kapitel, i hvilket omfang du har nået målet. Dvs. om du:

- Har genoplevet barnets kamp med og frustration over at sætte sig ind i en fremmed talverden.
- Har reflekteret over såvel positionssystemer som regnemetoder i fremmedartede positionssystemer.
- Teknisk behersker at regne i et talsystem med fremmed base og kan omskrive et tal fra én base til en anden.

2 AT GANGE OG DIVIDERE FLERCIFREDE TAL

I det indledende kapitel har læseren oplevet udfordringen i at forstå symbolerne og udføre beregninger i et andet positionssystem end det normale. Udfordringen er stor ved multiplikation og sikkert størst ved division af flercifrede tal. Vi håber, det har givet motivation og parathed til nu at se på spørgsmålet om børns arbejde med tilsvarende udfordringer på mellemtrinet i skolen. Kapitlet drejer sig om elevernes opfattelse af og regning med flercifrede tal. Da vi går ud fra, at addition og subtraktion er på plads, skal det nu dreje sig om multiplikation og division. Det er et felt, hvor der er sket meget i skolen i de sidste årtier.

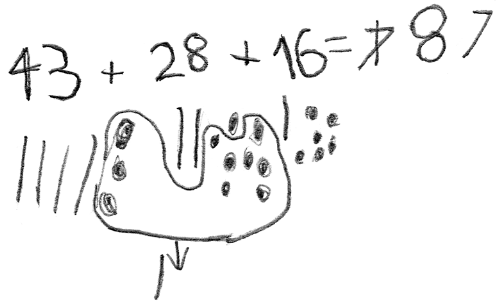
Det var især med faghæftet for matematik i 1995, at der kom en nyskabelse, som viste sig at være en udfordring for landets matematiklærere – ikke mindst i de mindre klasser. Eleverne skulle nu ikke længere undervises i at opstille regnemetoder, men som det hed i læseplanen for 1.-3. klasse:

> "Den enkelte elev skal have mulighed for at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse ved addition og subtraktion. Hovedregning, lommeregner og skriftlige notater indgår i et samspil i arbejdet med tallene."(s. 12).

Og i læseplanen for 3.-7. klasse:

> "I arbejdet med de naturlige tal udvikler eleverne fortsat egne beregningsmetoder. Standardiserede regneopstillinger indføres, hvis det for eleven er en forenkling af arbejdet." (s. 13).

Det betyder, at eleven ikke mere skal have forevist en bestemt måde at regne på, en såkaldt algoritme. Det indebærer, at eleven skal være medskaber, selv tænke og forsøge at finde på måder at klare opgaverne på, fx har Emilie med tegningen nedenfor klaret opgaven 43 + 28 + 16 ved at tegne en streg for tiere og en prik for enere under regnestykket. Hun tæller først tierne og får det til syv, som hun skriver Dernæst tæller hun enerne, og der er flere end ti, derfor kan hun veksle til en tier, altså er der nu otte, som hun skriver. Der er syv prikker tilbage, altså er resultatet 87.



Figur 1.

Måden, Emilie klarer additionen på, viser, at hun allerede har nogen forståelse af titalssystemet, og denne forståelse er den grundlæggende forudsætning for elevens arbejde med at udvikle sine egne metoder til at addere flercifrede tal og for multiplikation og division af større tal. Man kan indvende, at Emilie har skabt en besværlig måde at regne på, men det er her, matematiklæreren kommer ind. I takt med at eleven er klar til at gå videre, skal læreren fx gennem diskussioner i klassen om, hvordan man også kan addere, lede eleven videre til mindre omstændelige måder at addere på, og dette gælder i endnu højere grad for multiplikation og division. Til gengæld skal man ikke som før i tiden i hele år træne eleverne til at blive levende regnemaskiner, fordi de slet ikke kan eller skal konkurrere med lommeregnerne, når det kommer til at foretage divisioner som 4975412 : 587.

Vi sigter på, at læseren efter endt læsning af dette kapitel:

- Kender til en typisk udvikling i børns indledende arbejde med multiplikation og division af flercifrede tal.

- Kender til måder at arbejde på, så elevers arbejde med regnefærdigheder kan bygge på og videreudvikle deres forståelse af titalssystemets opbygning.
- Kan diskutere den traditionelle modstilling af færdighed og forståelse med teoretisk og empirisk belæg, herunder tabeltræningens rolle.
- Kan se videnspakker og forumteater som didaktiske hjælpemidler i eget studium.

Her er tale om et meget didaktisk kapitel, men det indeholder også mulighed for, at læseren kan udvikle sin matematiske kommunikationskompetence inden for dette faglige indhold, der fylder meget i skolen.

INDLEDENDE MULTIPLIKATION OG DIVISION

Multiplikation og division er på en måde to sider af samme sag, nemlig af multiplikativ tænkning. Som indledning til arbejdet med multiplikation og division skal vi se på et oplæg med et eksempel:

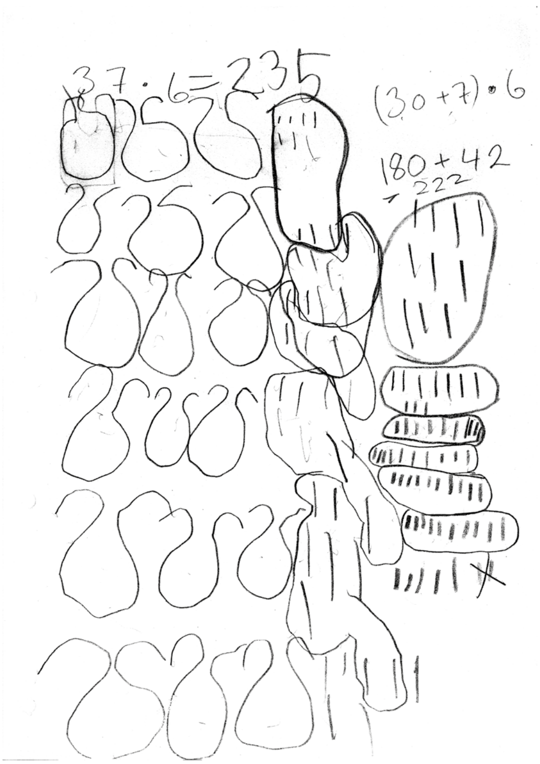
Overvej/diskuter 1

Mikkel og hans kammerater i 3.a har siden første klasse brugt kastanjer som tælle- og regnemateriale. Både i 1. og 2. klasse samlede de hen på efteråret kastanjer. Da de skulle begynde at arbejde med titalssystemet lagde de kastanjerne i plastikposer med 10 i hver og poserne i kasser med ti poser i hver.

Oprindeligt brugte de kastanjerne til direkte modellering af de situationer, de skulle arbejde med. Efterhånden begyndte de at tegne kastanjer, poser og kasser som støtte for deres arbejde. Eleverne anvender stadig kastanjerne og tegninger af dem, når de skal regne ting, der er udfordrende. Desuden benytter Jonas, Mikkels lærer, løbende kastanjerne som reference for at støtte elevernes forståelse af titalssystemet.

I efteråret i 3. klasse opstår der en situation, hvor de har brug for at finde svaret på 6 · 37. Mikkels svar på opgaven er vist i figur 2. Det er Jonas, der, før Mikkel gik i gang, skrev 37 · 6 øverst på siden, og som efter, at Mikkel skrev 235 som svar, skrev (30 + 7) · 6 og 180 + 42 = 222 øverst til højre.

Overvej og diskuter, hvordan Mikkel har tænkt. Overvej og diskuter også, hvad I tror, Jonas har forsøgt med det, han skrev, da Mikkel var færdig.



Figur 2.

Mikkel: Ja, jeg tegnede dem bare. Syvogtredive, det er 3 poser, og så er det 7 kastanjer. Og det er så dem der [peger på den øverste række, han har tegnet]. Og det var der så … det gjorde jeg 6 gange.
Jonas: Ja. Og hvad gjorde du så?
Mikkel: Jamen så talte jeg bare op//nåh nej, først tog jeg de der [peger på de 7 'kastanjer' i den øverste række] og så tog jeg 3 herfra og dem puttede jeg i en pose. Og sådan gjorde jeg også med resten … Og så talte jeg dem bare til sidst.
Jonas: Du talte dem bare til sidst. Godt. Tak skal du have. Har I alle sammen forstået, hvad Mikkel gjorde? [Lidt nikken] Er der nogen, der vil spørge Mikkel om noget? Er der nogen, der gjorde det anderledes?
Freja: Jeg brugte også kastanjeposer, eller tegnede kastanjeposer. Og så kunne jeg se, at der var 3, 6, 9, hvad hedder det … 12, 15, 18. Så det var 18 poser. Så det er så 18 tiere, så det er 180.
Jonas: Så det, du gjorde der, hvad kalder vi det?
Freja: At skiptælle.
Jonas: Så du skiptalte. Og hvad så mere?
Freja: Og så var det 6 syvere, så det// og to syvere er 14, så er 4 syvere 28, så det er 14 og 28 …

Digt en dialog, der fortsætter herfra, hvor I især fokuserer på lærerens bidrag til den fortsatte kommunikation.

Multiplikative situationer

I eksemplet ovenfor forsøger Mikkel at finde ud af, hvor mange kastanjer han skal bruge i alt, hvis der er 6 dynger med 37 i hver. Der er altså en mængde af en vis størrelse, der skal tages et antal gange. De to tal, 37 og 6, spiller her forskellige roller: 37, kaldet multiplikanden, angiver, hvor meget han skal tælle op hver gang; 6, multiplikatoren viser, hvor mange gange han skal gøre det. På grund af de forskellige roller kaldes det en *asymmetrisk multiplikationssituation.* Det er en hyppig multiplikationssituation, der let lader sig fortolke som gentagen addition. Normen i Danmark er, at man skriver multiplikatoren først i den korte notation: $6 \cdot 37 = 222$, og vi anbefaler, at matematiklærere prøver at være konsekvente her.

Imidlertid er der også andre multiplikationssituationer. Verschaffel & de Corte (1996) taler om i alt fire typer af multiplikative situationer. Den første er den netop nævnte, som de kalder situationer med *lige store mængder*. Den næste er også asymmetrisk og drejer sig om *multiplikative sammenligninger*. Hvis man får at vide, at Lucas har tre småkager, og at Sofie har fire gange så mange, er der tale om en multiplikativ sammenligning.

De to sidste multiplikative situationer er symmetriske, og der er ikke klar forskel på de to faktorer. Den ene symmetriske situation opstår i *rektangulære mønstre*, fx hvis vi ved, at et rektangel er 6 m på den ene led og 4 m på den anden og vi gerne vil finde dets areal.

Den sidste og fjerde multiplikative situation, som altså også er symmetrisk, bruges i forbindelse med *mængdeprodukter*. Det kan fx være, hvis den bil, man gerne vil have, fås i 4 udstyrsvarianter og i 6 forskellige farver, og man gerne vil vide, hvor mange valgmuligheder der er i alt.

Multiplikative situationer – division

Til hver af de ovennævnte multiplikationer hører der to eller én division afhængigt af, om multiplikationen er asymmetrisk eller symmetrisk.

1) *Ligedelingsdivision*. Hvis 3 elever skal dele 21 småkager ligeligt, så er det en situation med lige store grupper, dvs. et eksempel på den første af situationerne ovenfor. For at løse opgaven vil eleverne (i hvert fald til at begynde med), dele en kage ud til hver, indtil der ikke er flere. Der er her tale om det, der normalt omtales som en *ligedelingsdivision*. Det er der generelt, når vi kender produktet, her 21, og multiplikatoren, her 3. Vi vil da finde størrelsen på hver af de lige store mængder, multiplikanden.

2) *Måledivision*. Situationen er en anden, hvis man får at vide, at 21 småkager skal pakkes i poser med 3 i hver. Så vil eleverne måske bruge gentagen addition med 3, til de kommer op til 21, eller de vil bruge gentagen subtraktion af 3 fra 21, til de kommer ned til 0. I den situation er størrelsen af de lige store grupper, multiplikanden, kendt, mens antallet af grupper, multiplikatoren, ikke er det. Den situation kaldes en *måledivision*. Det gør den, fordi vi bruger multiplikanden, her 3, som måleenhed, og opgaven er at finde ud af, hvor mange sådanne enheder der er i hele mængden.

I en multiplikativ situation med lige store mængder kan der altså tænkes to forskellige former for division, ligedelings- og måledivision. Det skyldes, at situationen er asymmetrisk med forskel på multiplikator og multiplikand. Af samme grund kan man lave en tilsvarende skelnen mellem ligedelings- og måledivision i forbindelse med multiplikative sammenligninger.

3) *Ligedeling ved sammenligning*. Hvis Sofie har 12 småkager, og det er 4 gange så mange som Lucas har, kan man bestemme, hvor mange Lucas har ved at dele Sofies 12 op i 4 lige store dele. Svaret findes altså også her ved ligedeling.

4) *Måling ved sammenligning*. Situationen er en anden, hvis vi ved, at Sofie har 12 småkager, og Lucas har 3. Vi kan finde, hvor mange gange Sofie har det sammen antal kager som Lucas ved at tælle hendes småkager op i 3'ere, dvs. ved at måle hendes kager med Lucas' antal som måleenhed. Der er så tale om måledivision.

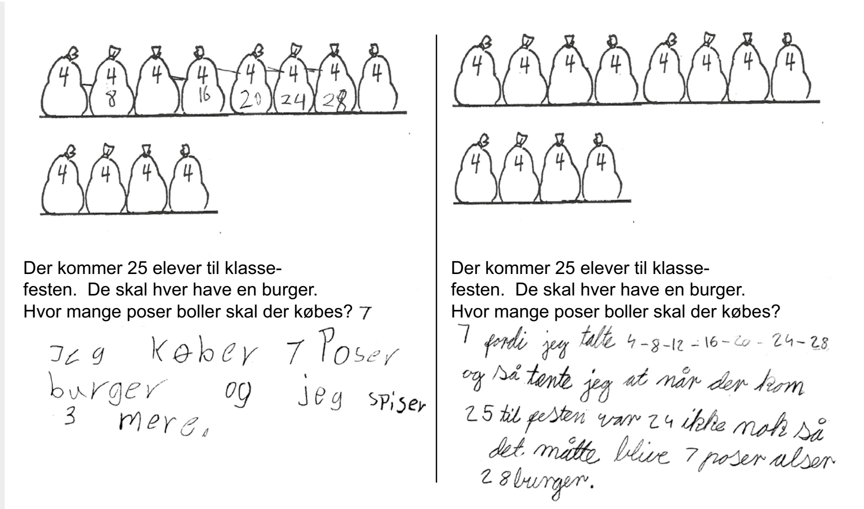
Det, der adskiller ligedelings- og måledivisioner, er altså, om det er multiplikanden eller multiplikatoren, man gerne vil finde. Derfor giver symmetriske situationer kun anledning til én divisionstype, da der ikke er forskel på de to faktorer. Situationer med rektangulære mønstre kan dog med nogen ret fortolkes som målesituationer. Antag, at et rektangel fx er 24 m^2, og den ene side er 6 m. Længden af den anden side kan da findes ved at lægge strimler på 1 m · 6 m på rektanglet – ved altså at bruge strimlerne som måleenhed.

Overvej/diskuter 2

I 4.b har de arbejdet med et oplæg om, hvor mange poser med fire boller i hver, man har brug for, når 25 børn skal have hver en bolle. Nogle af eleverne har brugt tabellen. Laura skriver således: "7 poser. 7 · 4 = 28 og så – 3 = 25". Andre er minde avancerede. Oliver skriver: "jeg talte bare" – uden at han angiver et svar. Sarah og Mads har lavet løsningerne herunder.

1) Hvilken multiplikativ situation og hvilken type division er der tale om i denne opgave?

2) Hvad tror I, Mads og Sarah ville sige, hvis de skulle fremlægge deres løsninger for klassen? Overvej og diskuter, hvad man som lærer kunne gøre for at kvalificere en efterfølgende klassesamtale.



Figur 3.

Vi har gjort en del ud af distinktionen mellem de forskellige multiplikative situationer. Det skyldes bl.a., at det ikke er usædvanligt at høre elever langt op i skoleforløbet spørge, om de skal gange eller dividere i en given situation. Det gælder også for elever, der faktisk er dygtige til teknisk at udføre begge typer af beregninger. Desuden påpeger Carpenter, Fennema og Franke (1996), at børn faktisk går forskelligt til de forskellige typer af problemer i deres direkte modellering af dem.

Det er naturligvis ikke meningen, at eleverne skal udsættes for en systematisk gennemgang af multiplikationstyper. Men hvis de møder de forskellige situationer, og i første omgang arbejder med dem med intuitive metoder, som de gradvist videreudvikler, ser det ud til, at nogle af problemerne med at genkende fx divisionssituationer undgås.

Det er fx den måde, de arbejder på i de didaktiske skole Realistisk Matematikundervisning (RME). Vi har i δ-bogen (s. 382 ff., 392 ff.) beskrevet, hvordan måledivision introduceres ved, at eleverne skal arbejde med løsning af et konkret omverdensproblem. Eleverne får at vide, at der kommer 81 forældre til møde på skolen, og at der kan sidde 6 ved hvert bord. Opgaven er at finde, hvor mange borde der er brug for. Sammen med opgaveformuleringen er der en tegning af et bord med de seks stole omkring. Fra en helt uformel og kontekstafhængig tilgang, hvor eleverne tegner og benytter