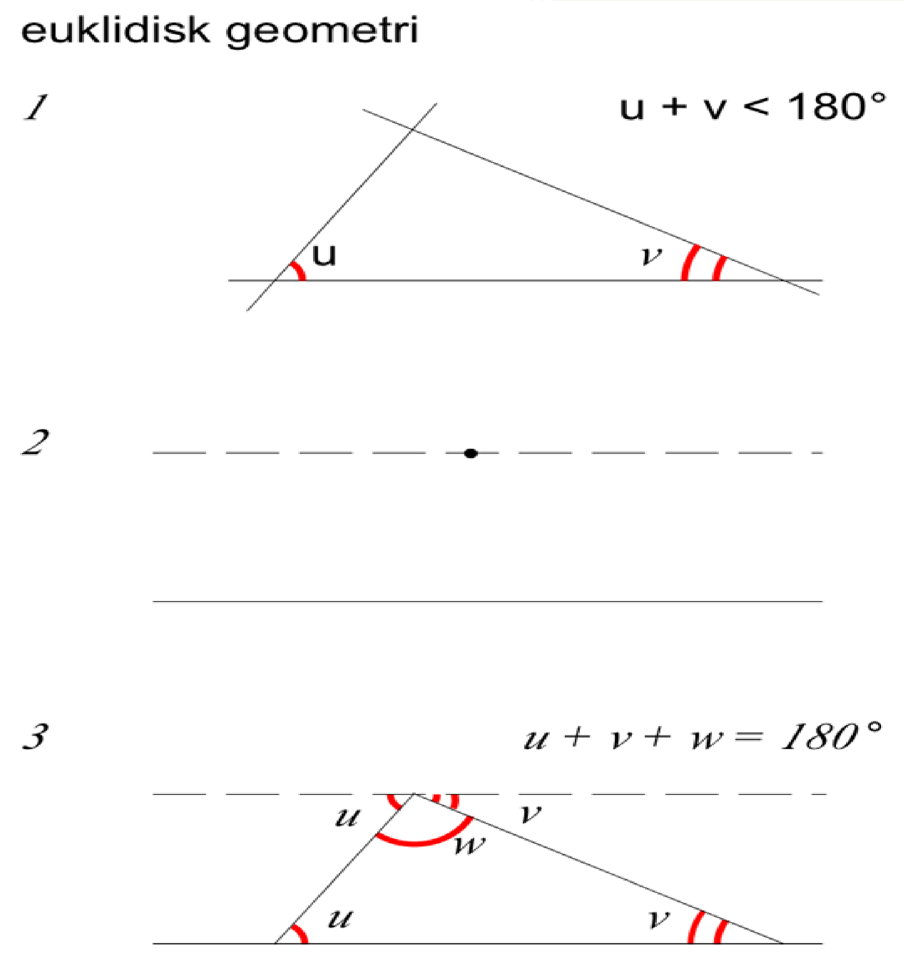
MatB

Geometri og trigonometri



Henrik Søgaard Hansen

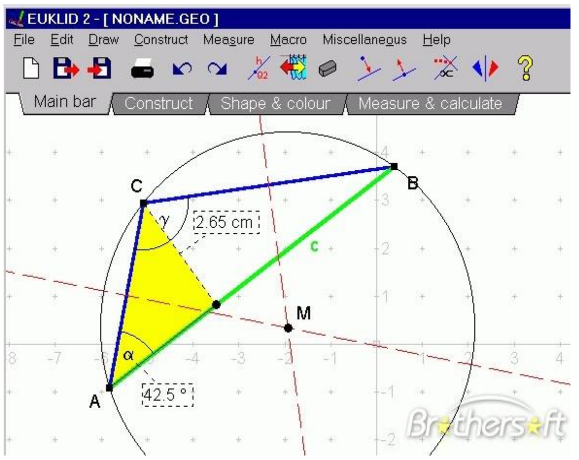
Sct. Knuds Gymnasium

Version 2.7

Geometri (Lidt Historie)

Geometrien er en del af matematikken. Ordet *geometri* kommer af græsk, og betyder "jordmåling". Grunden til dette er, at den ældste geometri blev skabt af de gamle flodkulturer (Ægypterne og Babylonerne), der måtte opfinde metoder til opmåling af marker m.m.

I almindelig tale omfatter geometrien arbejdet med figurer eks. cirkler, firkanter og trekanter og beregninger i disse.



Der findes mange slags geometri. Den mest kendte – og den først udviklede – er euklidisk geometri, der er geometri i planen. Der findes dog også andre geometrier, såkaldte ikke-euklidiske geometrier, som bl.a. er geometri i rummet. Disse former for geometri forudsætter ikke Euklids femte aksiom (se Euklidisk geometri).

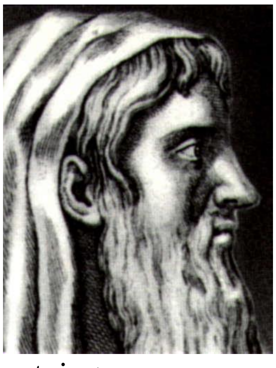
De græske filosoffer, f.eks. Platon, brugte ofte geometri til at anskueliggøre filosofiske problemstillinger. Geometri blev anset for en nødvendig forudsætning for filosofisk tænkning. En vigtig grund til, at de gamle grækere foretrak geometri frem for aritmetik, var at deres talsystem ikke var særlig veludviklet.

Et vigtigt fremskridt indenfor geometrien var integrationen af aritmetik og geometri i den såkaldte analytiske geometri, som matematikeren og filosoffen René Descartes udviklede i sin metodelære fra 1637. Her blev koordinatsystemet for første gang indført. Geometri før dette (syntetisk geometri) var baseret udelukkende på elegante og indlysende beviser i visuel form.

En vigtig del af geometrien er trigonometri, der er læren om måling af trekanter. Et andet stort navn her er også Pythagoras.

Den euklidiske geometri bygger på et antal postulater (kaldet aksiomer) som ikke kan bevises; for eksempel begrebet "et punkt" og at der gennem to punkter kan trækkes én og kun en ret linje.

Euklid



Den enkeltperson der i allerhøjest grad kom til at præge geometrien i årtusinder, var dog Euklid fra Alexandria (denne egyptiske by var ”græsk” i antikken). Vi ved meget lidt om hans liv som kan være startet omkring 325 f.Kr. og sluttet omkring 265 f.Kr. (video)

Euklid skrev et værk om matematik, Elementer, bestående af 13 bøger. Han gjorde meget ud af at præsentere matematikken på en strengt logisk måde, med definitioner, postulater, aksiomer (aksiomer betød dengang "selvindlysende sandheder”), sætninger og frem for alt beviser for sætningerne.

Den måde som Elementer var skrevet på, kom til at danne forbillede for matematikere helt op til omkring år 1900 e.Kr. Ikke al matematikken i Elementer er opfundet eller "opdaget" af Euklid selv; han kendte til Thales', Pythagoras', Eudoxos' og andres arbejde. Men Euklid præsenterede det i sine Elementer på en måde der kom til at stå som den endegyldige.

Postulat 1: at man kan trække en ret linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt.

Postulat 2: at man kan forlænge en begrænset ret linje ud i ét.

Postulat 3: at man kan tegne en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst radius.

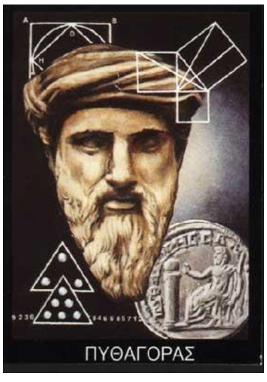
Postulat 4: at alle rette vinkler er lige store

Postulat 5: at når en ret linje skærer to rette linjer, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linjer når de forlænges ubegrænset.

Euklids postulater har givet anledning til megen grublen: det såkaldte *parallel-postulat* (postulat 5) som udsiger, at der gennem et punkt uden for en ret linje kan trækkes én og kun en ret linje parallel med denne. Man har siden oldtiden atter og atter forsøgt at *bevise* dette postulat ud fra Euklids øvrige postulater, men hver gang et "bevis" var fremsat, blev det påpeget, at det var et cirkelbevis, dvs. at man i bevisførelsen på en eller anden måde var gået ud fra det, som skulle bevises. Det er dog nu vist, at Euklids parallel-postulat er uafhængigt af de øvrige. Hvor parallelpostulatet gælder, er der tale om klassisk, euklidisk geometri.

Her kan du læse Euklids bøger online
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Pythagoras:



Pythagoras fra Samos (582 f.Kr. - 507 f.Kr.) var en græsk filosof, mystiker, matematiker, musikteoretiker og musikterapeut. (video)

Pythagoras forenede i sin lære matematik og talmystik med musik (både udøvelse og teori) og forestillingen om sjælens udødelighed.

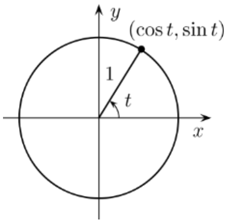
Pythagoras har lagt navn til den pythagoræiske læresætning, men han opfandt den ikke, da egypterne kendte den lang tid før ham. Pythagoras sætning angår forholdet mellem længden af siderne i en retvinklet trekant. Den lyder: Summen af kateternes kvadrater, i en retvinklet trekant, er lig med kvadratet på hypotenusen. I symbolsk notation: $a^2 + b^2 = c^2$

En af Pythagoras' studenter, Hippasos fra Metapontum, grundede over kvadratroden af 2. Han kom ikke frem til nogen brøk, men til et irrationelt tal. Pythagoras forklarede verden ud fra hele tal og så Hippasos' påstand som et kætteri. Studenten blev derfor smidt i havet af andre pythagoræere og druknede.

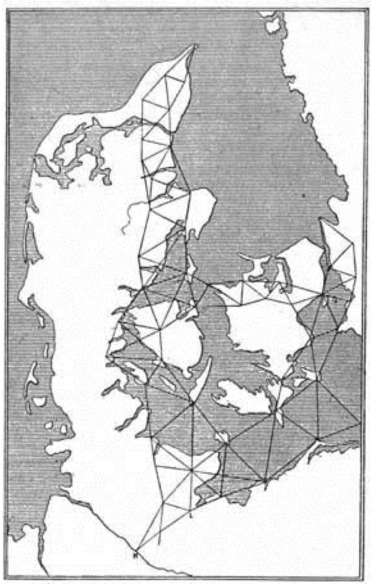
Pythagoras giftede sig med en af sine yndlingselever, Theano. Leder for den syriske ny platoniske skole på Evboia, Jamblikos, skrev flere bøger om pythagoræerne, deriblandt at Theano arbejdede med det gyldne snit. Ansvaret for Pythagoras' efterladte skrifter gik til deres datter Damo; de to andre døtre, Arignote og Miyia, skal også have været pythagoræere. Af gamle medlemslister fremgår, at ca. syv procent af medlemmerne var kvinder.

Trigonometri

Trigonometri (fra græsk *trigonon* = tre vinkler og *metro* = måle) er en gren af matematikken der behandler relationen mellem sider og vinkler i trekanter. Hertil er knyttet trigonometriske funktioner som sinus (forkortet sin), cosinus (forkortet cos) og tangens (forkortet tan). Alle funktioner er defineret i enhedscirklen.



Triangulering



Trekants beregninger blev bl.a. brugt til landmåling (triangulering) (video).

Danmark har været kortlagt adskillige gange. De første forsøg på at tegne danmarkskortet skete på baggrund af især søfolks beretninger om kystlinjens forløb. Resultaterne var ofte ret fantasifulde.
Først da man i 1700 tallet gik over til **triangulering**, begyndte kortene at ligne Danmark.

Som navnet antyder, er **triangulering** en metode, hvor landet dækkes at et net af trekanter. Trekanterne lægges, så der er frit udsyn fra en trekants vinkelspidser til nabo vinkelspidserne. De **trigonometriske stationer** blev anbragt på markante bakketoppe i form af forankrede stenblokke.

Ideen var, at man ud fra én trekantside og **vinkelmålinger** kunne beregne de andre sider i en trekant. Når de var kendte, kunne nabotrekanternes sider beregnes ud fra lutter vinkelmålinger.

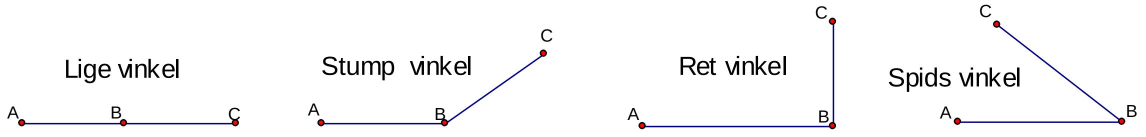
Intro til trekantsberegninger

En trekant har tre sider og tre vinkler (video), dvs. der hører i alt seks "stykker" til en given trekant. Hvis tre af disse seks stykker er givet (mindst ét af dem skal dog være en side), kan man ved hjælp af tre matematiske "regneregler" beregne de tre manglende stykker. De tre formler/"regler" er:

- Cosinusrelationen
- Sinusrelationen
- Summen af vinklerne i enhver trekant er 180°

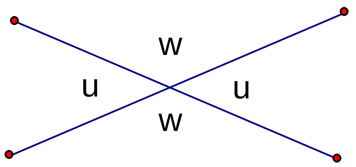
Vinkler

Vinkler måles i grader. Fra gammel dag har man inddelt en cirkel i 360°. En ret vinkel er 90°, men en lige vinkel er 180°. Når en vinkel er mellem 0° og 90° kaldes vinklen for spids. Når en vinkel er mellem 90° og 180° kaldes den for stump. Punkter og dermed også vinkelspidser angives med store bogstaver. Se nedenstående illustrationer.



Topvinkler

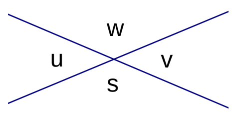
På figuren til højre ses to skærende linjer. Der dannes fire vinkler. Vinklerne over for hinanden i forhold til skæringen kaldes for topvinkler.



Sætning: Topvinkler

Topvinker er lige store

Bevis:



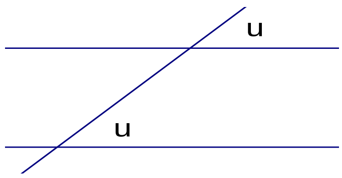
Tegner to skærende linjer og angiver de fire vinkler

$$v = 180 - w \; og \; u = 180 - w \;\Rightarrow\; u = v$$

$$w = 180 - v \; og \; s = 180 - v \;\Rightarrow\; w = s$$

Hermed bevist

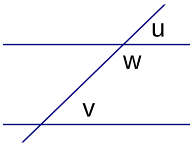
Ensliggende vinkler



På figuren til højre ses to parallelle linjer som skæres af en tredje linje. De to vinkler, der på figuren er betegnet u, siges at være *ensliggende*.

Sætning: Ensliggende vinkler

Ensliggende vinkler er lige store



Bevis

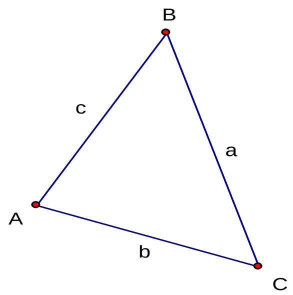
Tegner to parallelle linjer og en tredje som skærer. Angiver enkelte vinkler

Ud fra Euklids 5 postulat må der gælde at:
$v + w = 180 \Leftrightarrow v + (180 - u) = 180 \Leftrightarrow v - u = 0 \Leftrightarrow v = u$

Hermed bevist

Trekanter

En **trekant** er i geometrisk forstand en polygon med tre vinkler og tre sider. Sider og vinkler omtales under ét som trekantens *stykker*. (video)



En side der ligger overfor en vinkelspids kaldes for den *modstående side* og betegnes med det samme bogstav som vinkelspidsen (skrives med lille).

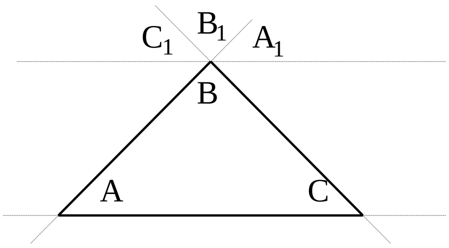
De sider der ligger i vinkelspidsen kaldes for *hosliggende sider*.

Vinkler skrives med store bogstaver er de modstående sider med vinklens lille bogstav.

Sætning: Vinkelsummen i en trekant

Vinkelsummen i en trekant er 180°.

Bevis: (video)
Lad en trekant være bestemt ved tre punkter A, B og C. Gennem hver af siderne i trekanten tegnes en ret linje. Desuden tegnes en ret linje gennem punktet B parallel med siden AC.



Af figuren ses, at A og A_1 er ensliggende vinkler, og derfor har vi at A = A_1.

C og C_1 er ligeledes ensliggende vinkler. Altså er C = C_1.

Da B og B_1 er topvinkler, har vi at B = B_1.

Af figuren fremgår det, at $A_1 + B_1 + C_1 = 180^o$.

Men da $A = A_1$, $B = B_1$ og $C = C_1$, så gælder der også, at $A + B + C = 180^o$.

Hermed bevist.

Lav opgave 111 side 153, opgave 112 side 153 og vinklerne i opgave 113 side 153

Sætning: Arealet af en trekant

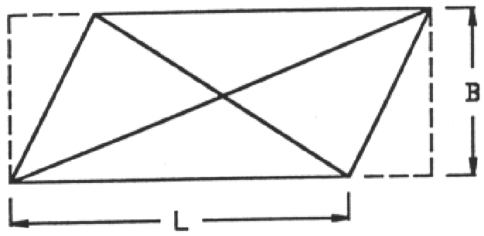
Arealet i en trekant er givet ved formlen $T = ½ \cdot h \cdot g$

Bevis: (video)

Konstruer to kongruente trekanter (to helt ens trekanter). Læg de to trekanter sammen, så de danner et parallelogram (som har parvis parallelle og lige lange sider).

De modstående vinkler er lige store, og de fire vinkler er tilsammen 360°. Ethvert parallelogram kan omdannes til et rektangel eller kvadrat.

Areal = L · B

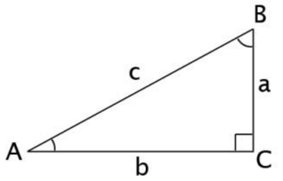


Dermed må arealet af en trekant være halvdelen af en et rektangel eller kvadrat. Hermed bevist

Lav evt. trekantsberegning_udg2.pdf side 2 og 3
opgave 113 side 153, opgave 116 side 153 og opgave 120 side 153

Retvinklet trekant

I en retvinklet trekant er den ene vinkel 90° og det markeres med et hak. Ofte navngiver vi den rette vinkel med et C.



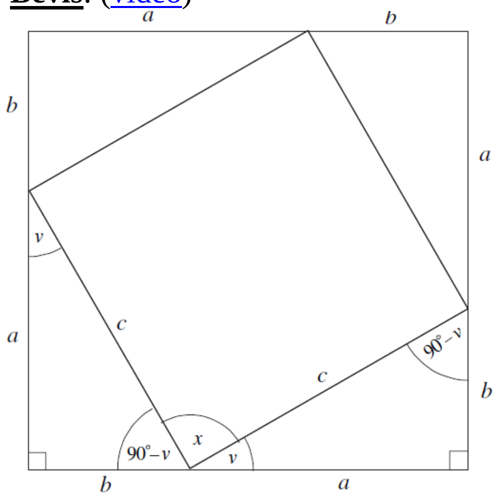
Den længste side i trekanten kaldes for *hypotenusen* og er den modstående side til den rette vinkel.

De to hosliggende sider til den rette vinkel kaldes for *kateter*.

Sætning: Pythagoras lærersætning

I en retvinklet trekant ABC gælder der at $a^2 + b^2 = c^2$, hvor a og b er kateterne og c er hypotenusen.

Bevis: (video)



Vi tager vores retvinklede trekant ABC som vist ovenfor og konstruere nu kvadratet til venstre ved blot at dreje trekanten 90° over 4 gange.

Vi kan regne arealet af det store kvadrat ud på to måder.

Som stort kvadrat: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Nu kigger vi på de fire trekanter og firkanten i midten.

Vinkel x er:
180° - (90° - v) - v = 180° - 90° + v – v = 90°

Da det er ens for alle fire hjørner har vi et kvadrat i midten.

Samler vi arealet for alle figurerne fås $4 \cdot ½ \cdot b \cdot a + c^2 = 2 \cdot b \cdot a + c^2$

De to arealer må være lige store. Derfor må der gælde: $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b + c^2$

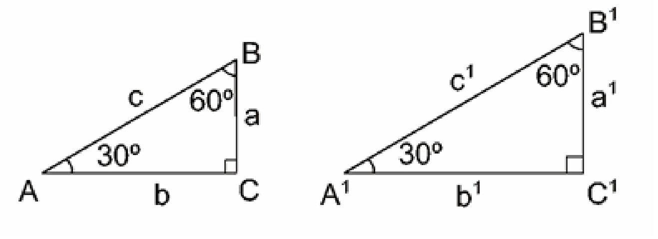
Hvilket giver $a^2 + b^2 = c^2$. Hermed bevist

Lav evt. trekantsberegning_udg2.pdf side 4 - 9
opgave 118 side 153, opgave 119 side 153 og opgave 121 side 153

Se eventuelt http://www.youtube.com/watch?v=-aSmkQGXjIc&feature=player_embedded
fra www.frividen.dk

Ensvinklede trekanter (ligedannede)

To trekanter er ensvinklede når de har parvis lige store vinkler ([video](#)). ([link](#))



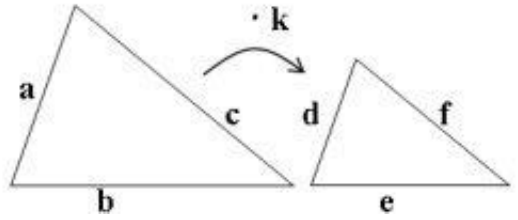
Definition om ensvinklede trekanter

$a1 = a \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{a1}{a}$

$b1 = b \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{b1}{b}$

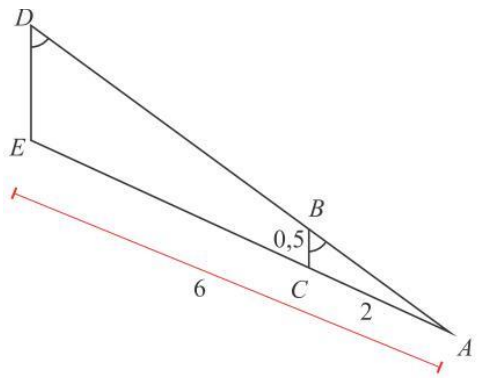
$c1 = c \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{c1}{c}$

Samlet gælder der at der gælder følgende $k = \frac{a1}{a} = \frac{b1}{b} = \frac{c1}{c}$



Eksempelvis:

På figuren ses en model af et trekantet rækværk ADE på en rutchebane Det oplyses, at DE og BC er parallelle samt at |AE|=6, |AC|=2 og |BC|=0.5. Bestem |DE|



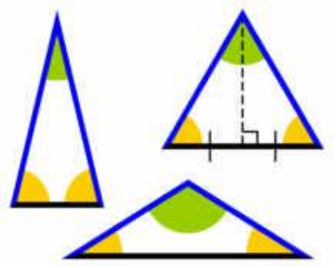
Da trekanterne ABC og ADE er ensvinklede da A er fælles. Vinkel ABC og vinkel CBD er lige store så må de resterende vinkler også være lige store.

Dermed gælder der et størrelsesforhold mellem trekanterne $k = \frac{6}{2} = 3$

Så bliver $|DE| = 3 \cdot 0.5 = 1.5$

Lav evt. trekantsberegninger_udg2.pdf side 11-14
Lav opgave 124 side 153, opgave 125 side 153

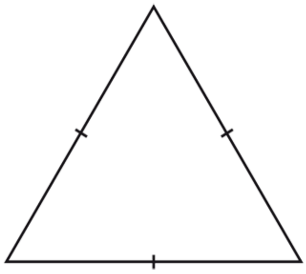
Ligebenet trekant



I en ligebenet trekant er to af siderne lige lange hvilket gør at to af vinklerne er lige store. Fra topvinklen hvor de to lige lange ben mødes falder højden, medianen, vinkelhalveringslinje og midtnormalen i en og samme linje. (video)
De to lige store vinkler kaldes grundvinkler.

Ligesidet trekant

En ligesidet trekant er en trekant hvor alle tre sider er lige lange. Da alle tre sider er lige lange bliver de tre vinkler lige store, nemlig 60°. Egenskaben ved ligebenet trekanter gælder i alle spidser i en ligesidet trekant.



Lav opgave 114 og opgave 115

Klassisk geometri

I en hver trekant er der nogle karakteristiske linjer, som hver har deres egne egenskaber. De linjer som vi vil kigge nærmere på er følgende:

1. **Midtpunktstransversal**: Går fra midt på en side til midt på en anden side.
2. **Median**: Går fra vinkelspids til midt på modstående side.
3. **Vinkelhalveringslinje**: Løber igennem en vinkelspids og halvere denne.
4. **Midtnormal**: En linje der står vinkelret midt på en linje
5. **Højde**: Går fra vinkelspids og vinkelret ned på modstående side.

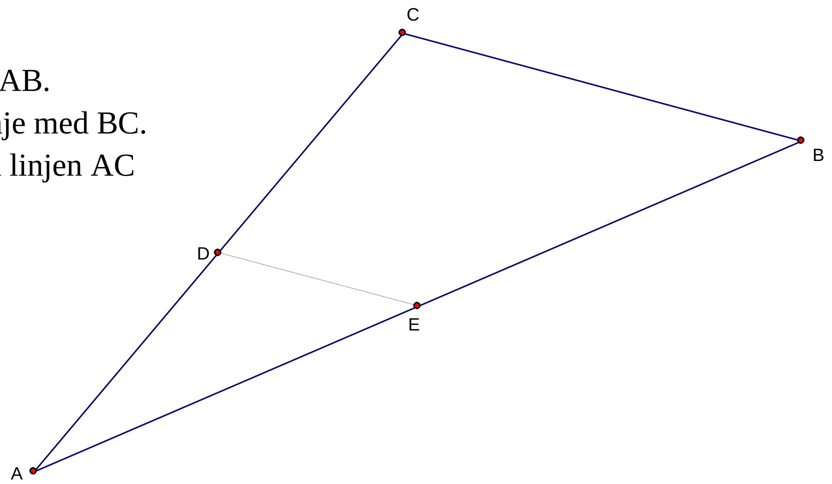
Fælles for dem alle er, at der er tre af dem i en trekant.

Sætning: Midtpunkts transversal

En midtpunktstransversal for to sider i en trekant er parallel med den tredje side i trekanten og halvt så lang som denne.

Bevis: (video)

Konstruer trekant ABC



1. Konstruer midtpunktet E på linjen AB.
   Gennem E tegnes nu en parallel linje med BC.

Nu skal vi vise at punktet D ligger midt på linjen AC

2. Da DE || BC så er vinklerne AED og ABC lige store jf. sætningen om ensliggende vinkler.
3. Da de har fælles vinkel A er ABC og ADE ensvinklede.
4. Da E er midtpunkt på AB må skalafaktoren mellem de to trekanter være ½
5. Da ABC og ADE er ensvinklede og skalafaktoren er ½, må D være midtpunktet på AC, og dermed er DE en midtpunkts transversal.
6. Da skalafaktoren er ½, må |DE|=½|BC|

Hermed bevist

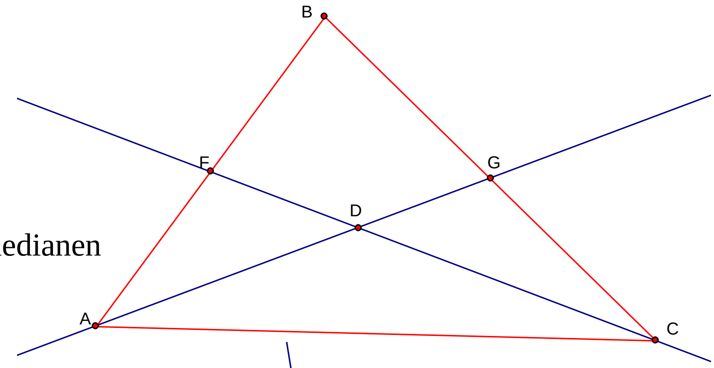
Sætning: Medianer

Medianerne skærer hinanden i samme punkt.

Skæringspunktet deler medianerne i forholdet 1:2

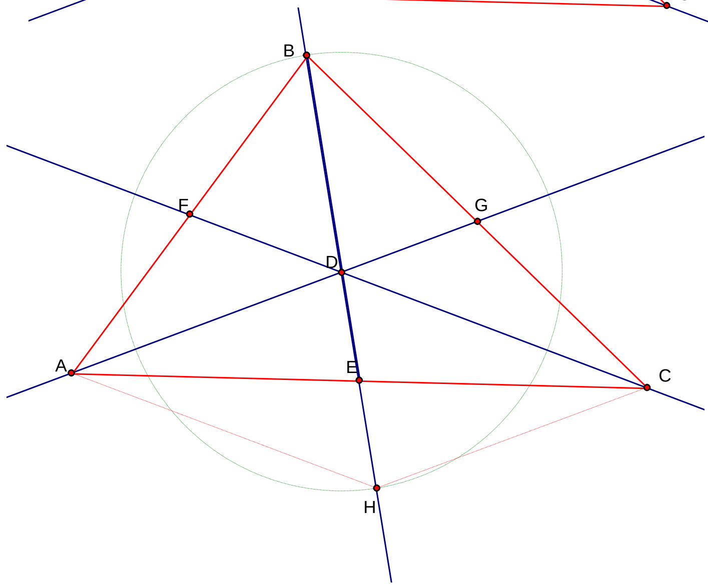
Bevis: (video)

Konstruer trekant ABC



1. Medianerne gennem vinkel A og vinkel C konstrueres
2. Medianerne skærer hinanden i D

Nu skal vi vise at linjen gennem BD ligger oveni medianen fra B



3. Gennem B og D tegnes nu en linje. Punktet H afsættes nu på denne linje således at |BD| = |DH| (konstrueres ved hjælp af cirklen).
4. Nu er DG midtpunktstransversal i BCH, så |DG| = ½ |HC|
5. Tilsvarende må der gælde at |DF| = ½ |AH|
6. Firkant ADCH er et parallelogram (da AG er parallel med HC og CF er parallel med AH). Da diagonalerne i et parallelogram halvere hinanden, så må punktet E være midtpunktet på AC og dermed er linjen gennem BE en median.

Nu mangler vi bare at finde forholdet.

7. Da ADCH er et parallelogram må |HC| = |AD|, dermed må |DG| = ½ |AD|

Hermed bevist.

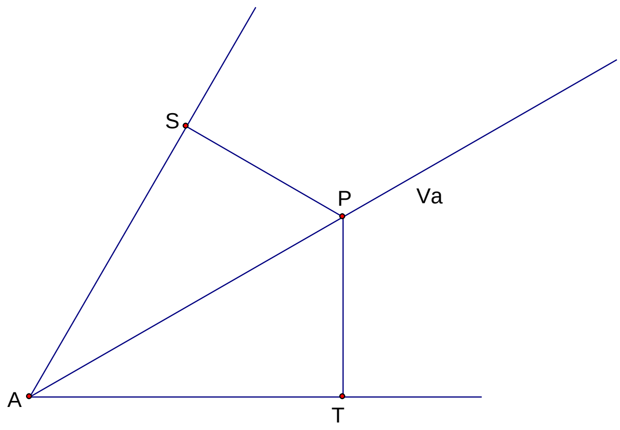
Sætning: Vinkelhalveringslinje

Vinkelhalveringslinjerne skærer hinanden i samme punkt.

I skæringspunktet kan den indskrevne cirkel konstrueres.

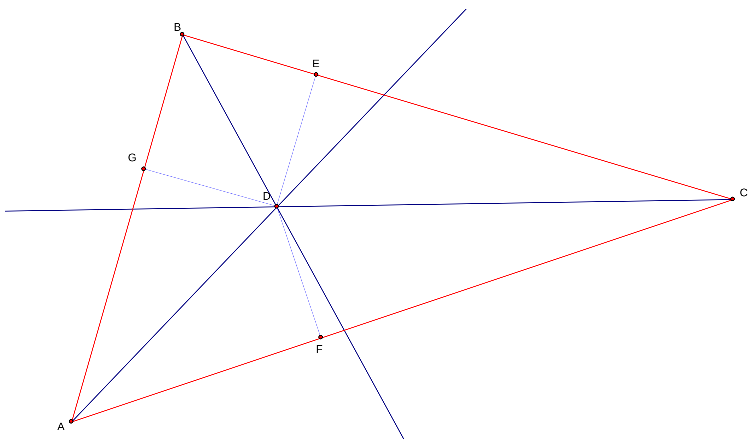
Bevis: (video)

VITIG POINTE/EGENSKAB: For et hvert punkt på vinkelhalveringslinje gælder der, at de vinkelrette afstande ud til vinklens ben er lige store. (på tegning $|SP| = |TP|$)



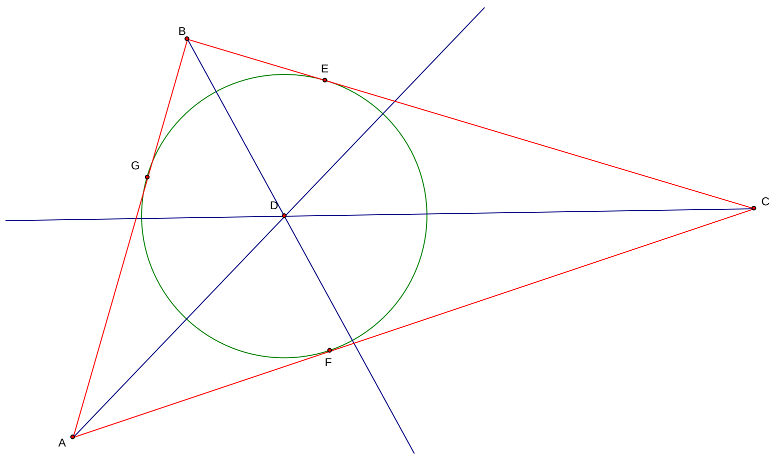
Vi kan se at der dannes to trekanter APS og APT. Disse er ensvinklede da de begge er rette, de deler vinkel A og dermed er de sidste vinkler også lige store. Da adskilles de kun af en skalafaktor. Denne er 1, da de har samme side, nemlig $|AP|$. Dermed må $|SP| = |TP|$

Konstruer trekant ABC.



Vi skal nu blot vise at linjen gennem C og D også er en halveringslinje.

1. Konstruer vinkelhalveringslinjen til vinkel A og vinkel B. Disse to vinkelhalveringslinjer skærer hinanden i D.
2. For v_a gælder der |DG| = |DF| og for v_b gælder der |DG| = |DE|
3. Så må |DF| = |DE| og dermed løber v_c gennem D. De skærer altså i samme punkt.
4. En cirkel med centrum i D og radius r = |DG| = |DE| = |DF| vil tangere alle tre sider.



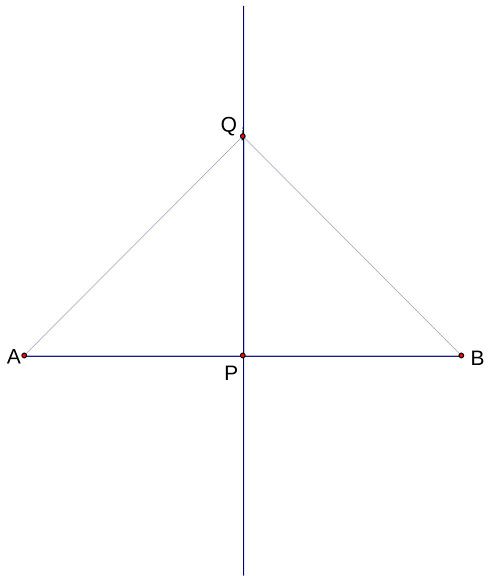
Hermed bevist

Sætning: Midtnormal

Midtnormalerne i en vilkårlig trekant skærer hinanden i samme punkt.

I skæringspunktet for midtnormalerne kan den omskrevne cirkel konstrueres.

Bevis: (video)



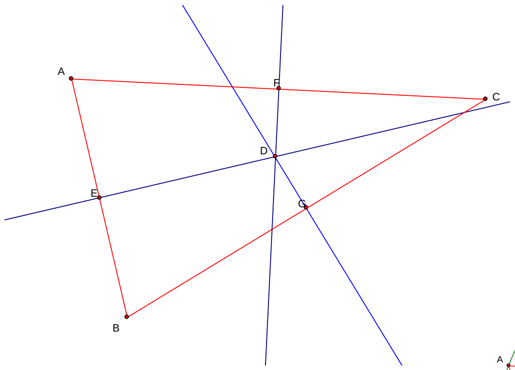
VIGTIG POINTE/EGENSKAB: Afstanden fra et hvilken som helst punkt på en midtnormal, til enderne på den linje den er oprejst, er lige store.

På tegningen til højre ses en linje AB hvor på en midtnormal er konstrueret. Der er afsat et vilkårligt punkt Q på midtnormalen.

Da midtnormalen er vinkelret på midtpunktet P må der gælde at trekanterne APQ og BPQ er retvinklede.

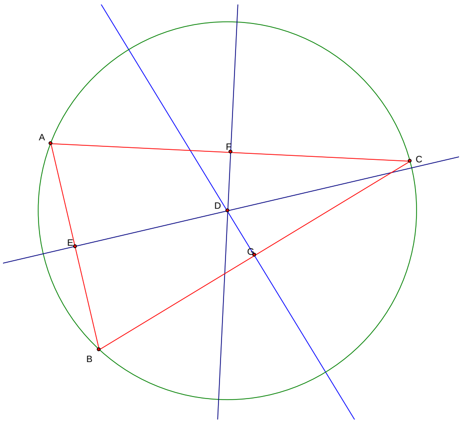
Vi kan benytte Pythagoras lærersætning ($a^2 + b^2 = c^2$) til at bestemme $|AQ|$ og $|BQ|$.

Da $|AP| = |PB|$ og da $|PQ|$ er fælles for begge trekanter, da må $|AQ| = |BQ|$.



Konstruer nu trekant ABC

1. Konstruer midtnormalen for linjen AB og AC.
2. Da D ligger på midtnormalen for AB må |DA| = |DB| og tilsvarende gælder der for D på midtnormalen for AC at |DA| = |DC, så må |DC| = |DB|. Her af følger at D ligger på midtnormalen for AC.
3. Da |DA| = |DB| = |DC| må en cirkel med radius i D og radius |DA| gå gennem de tre vinkelspidser.



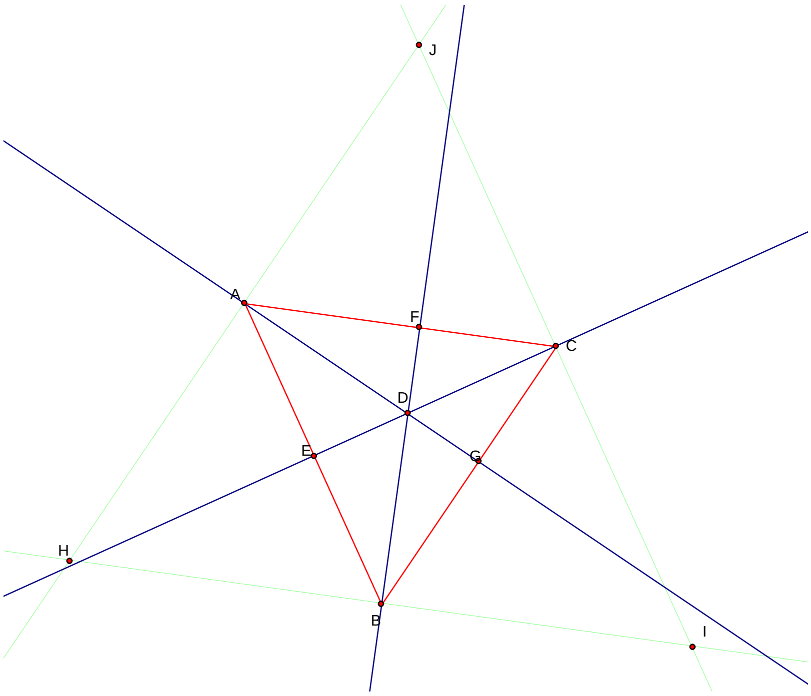
Hermed bevist

Sætning: Højder

Højderne i en vilkårlig trekant skærer hinanden i samme punkt.

<u>Bevis:</u> (video)

Konstruer trekant ABC



Konstruer de tre højder i trekant ABC. Det ser ud til at de skærer hinanden i punktet D, men er det tilfældet??

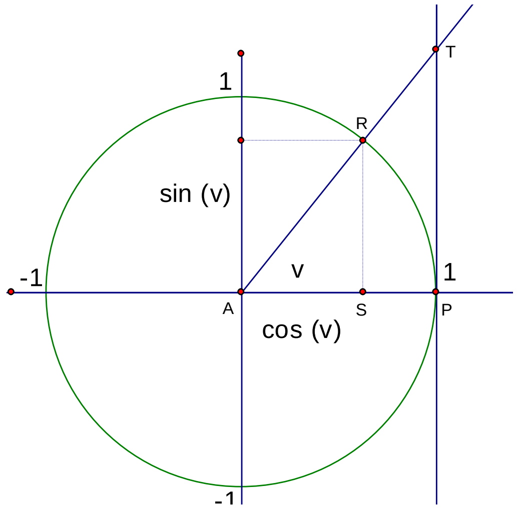
1. Parallelt med AC og gennem B tegnes en linje.
2. Parallelt med BC og gennem A tegnes en linje.
3. Parallelt med AB og gennem C tegnes en linje.
4. Nu har vi konstrueret trekant HIJ.
5. Firkant ACHB er et parallelogram og derfor er |AC| = |HB|, og |BC|=|HA|
6. Firkant ACIB er et parallelogram og derfor er |AC| = |BI| og |AB|=|CI|
7. Firkant ABCJ er et parallelogram og derfor er |AB|=|CJ| og |BC|=|AJ|
8. Dermed er |HB| = |BI| og da linjen gennem B er vinkelret på AC så er den også vinkelret på HI (jf. Euklids 5. postulat). Dermed bliver den til en midtnormal for HI. Tilsvarende kan ses for de øvrige højder da |CI|=|CJ| og |HA|=|AJ|.
9. Midtnormaler skærer hinanden, og derfor må de tre højder også gøre det.

Hermed bevist

Vilkårlige trekanter

For at finde formler der gælder for vilkårlige trekanter, herunder også de specialtilfælde som lige er blevet gennemgået, skal vi først indføre sinus, cosinus og tangens. (video)

Enhedscirklen



Enhedscirklen er kendetegnet ved at dens radius er 1, og centrum er i Origo, altså (0,0). Vinklen mellem x-aksen og ”en radius” benævnes ofte v.

Vinklen v måles i positiv omløbsretning (mod uret).

Skæringspunktet mellem vinklens ben og cirkel-buen, kaldes retningspunktet til vinklen v, og betegnes her med R.

Punktet R har koordinaterne (cos(v), sin(v)), hvilket betyder, vi kan definere de trigonometriske funktioner grafisk vha. enhedscirklen:

- cos (v) ”cosinus til vinklen v” er første-koordinaten til retningspunktet P.
- sin (v) ”sinus til vinklen v” er anden-koordinaten til retningspunktet P.
- tan(v) ”tangens til vinklen v” er anden-koordinatet til punktet T. Punktet T fås ved skæringspunktet mellem vinkelbenet og den lodrette tangent i x=1.

Tangens kan også skrives som $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$

”Bevis” for tangens

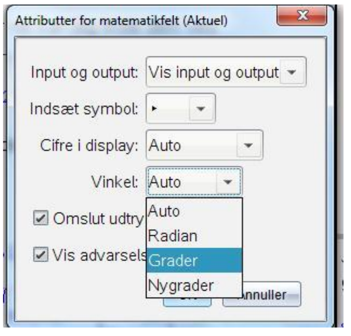
Ud fra ovenstående enhedscirkel har vi to ensvinklede trekanter, nemlig ARS og ATP.

Dermed fås $\frac{TP}{RS} = \frac{AP}{AS} \Leftrightarrow \frac{\tan(v)}{\sin(v)} = \frac{1}{\cos(v)} \Leftrightarrow \tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$

Hermed bevist

VIGTIGT: Nspire skal stå til at arbejde i grader da vi ikke har indført radianer endnu.

Den enkelte math-boks kan indstilles som på billedet til højre. Hvis du vil gøre det til standardindstilling så kan du følge denne video.



Lav øvelse 1.1 side 239 og øvelse 1.2 side 239

Hvis vi skal taste så kan vi eks. gøre det på følgende måde:

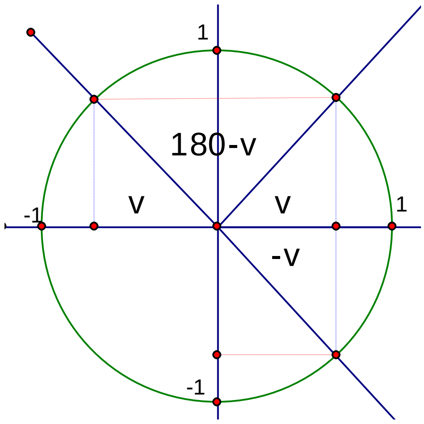
Vi taster blot $\sin(30)$ i en Math-boks i Nspire og så giver den os $\sin(30) = 0.5$

Lav øvelse 1.6 side 241

Vil du se en illustration af enhedscirklen i geometer, så se her "enhedscirklen" (programmet).

Særlige egenskaber ved enhedscirklen

Specielt gælder der at (video):



$\sin(180 - v) = \sin v$

$\sin(-v) = -\sin(v)$

$\cos(180 - v) = -\cos(v)$

$\cos v = \cos(-v)$

$\tan(v) = \tan(180 + v)$

Den inverse funktion til sinus er argussinus og skrives som $\sin^{-1}$ eller arcsin.

Den inverse funktion til cosinus er arguscosinus og skrives som $\cos^{-1}$ eller arccos.

Den inverse funktion til tangens er argustanges og skrives som $\tan^{-1}$ eller arctan.

Eksempelvis:

Vi kender $\sin(v) = 0.8$, hvor stor er vinklen.

Vi isolerer v ved at benytte argussinus

$$sin^{-1}(\sin(v)) = sin^{-1}(0.8)$$

$$v = sin^{-1}(0.8) = \arcsin(0.8) = 53.13$$

Altså er en af løsningerne til $\sin(v) = 0.8$ fundet til $v = 53.13°$

Ud over denne er der også $v = 180° - 53.13° = 126.87°$ (se ovenstående) og et multiplum af 360°

Lav øvelse 1.7 side 241

Beregninger med cosinus, sinus og tangens i en retvinklet trekant

Nu da vi har fået indført vores retvinklede trekant med hypotenusen 1, og vi kender til skalafaktoren ved ensvinklede trekanter, så er det på tide at udvide området til at gælde alle retvinklede trekanter.

En tanke kunne jo være at vi kunne opskalere vores trekant "enheds"-trekant ved at benytte den nye trekants hypotenuse som skalafaktor.

Sætning: cos, sin og tan til en spids vinkel i en retvinklet trekant

I en retvinklet trekant ABC gælder

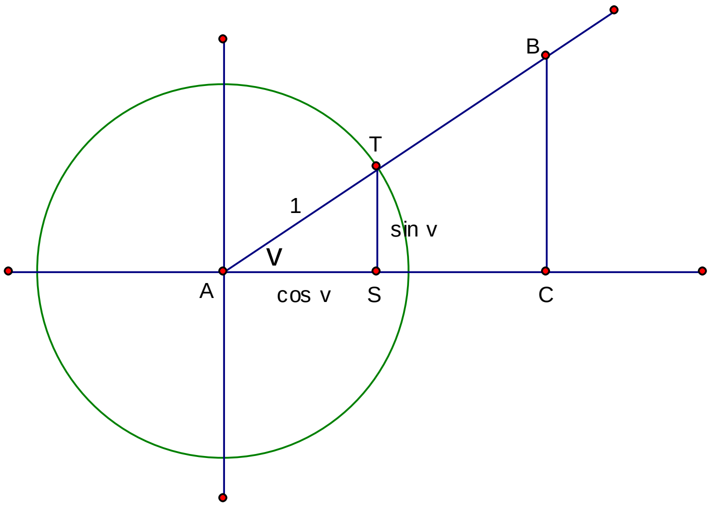
1. $sinA = \frac{a}{c}$ $eller\ med\ ord\ "sinus\ til\ en\ spids\ vinkel\ = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen.}"$

2. $cosA = \frac{b}{c}$ $eller\ med\ ord\ "cosinus\ til\ en\ spids\ vinkel\ = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}"$

3. $tanA = \frac{a}{b}$ $eller\ med\ ord\ "tangens\ til\ en\ spids\ vinkel\ = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}"$

Bevis: (video)

Ud fra enhedscirklen konstrueres en retvinklet trekant ABC, som også ligger med spidsen i Origo.



ATS og ABC er ensvinklede da de begge er rette og har vinkel V fælles.

Dermed er forholdet mellem siderne ens jf. tidligere sætning om ensvinklede trekanter:

$$\frac{AB}{1} = \frac{BC}{\sin v} = \frac{AC}{\cos v}$$

Så kigger vi på

1. $\frac{AB}{1} = \frac{BC}{\sin v} \Leftrightarrow \sin v = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$

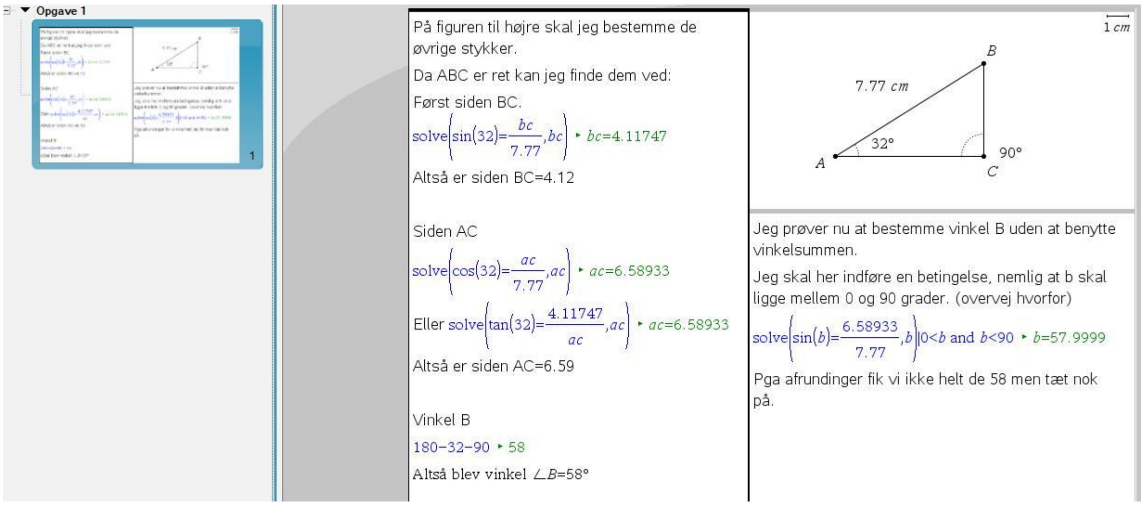
2. $\frac{AB}{1} = \frac{AC}{\cos v} \Leftrightarrow \cos v = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

3. $\frac{BC}{\sin v} = \frac{AC}{\cos v} \Leftrightarrow \frac{\sin(v)}{BC} = \frac{\cos(v)}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \tan v = \frac{a}{b}$

Hermed bevist

Nu kan vi benytte ovenstående sætning til at bestemme øvrige vinkler og sider i en vilkårlig retvinklet trekant.

I Nspire kan vi løse en tænkt opgave således. Vi får givet en retvinklet trekant med hypotenusen 7.77cm og vinkel A er 32°. Bestem de resterende sider og vinkler.



Oftest vil man bestemme den sidste vinkel ved vinkelsummen, men for at illustrere angivelsen af en betingelse viste jeg også denne.

Lav opgave 224 side 262, opgave 226 side 262, opgave 227 side 262, opgave 230 side 262 og opgav 231 side 262

Skævvinklede trekanter

Her behandles alle trekanter under ét.

Hvis man kender tre "stykker" – vinkler eller sider i en trekant, kan man bestemme de øvrige. Dette gælder dog ikke hvis man kun kender de tre vinkler.

Øvelse: Overvej hvorfor man ikke kan sige noget ud fra tre kendte vinkler.

Da vi gennemgik højder så vi at der var tre højder i en trekant, så ud fra vores viden om at arealet af en trekant kan skrives som $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$

Dette giver os nu følgende tre måder at skrive arealet på

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_b \cdot b$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c$$

Dette udvider vi til at bruge vores nye viden om sinus i retvinklede trekanter.

Sætning: Arealet af en trekant

Arealet af en vilkårlig trekant er

$T = ½ \cdot a \cdot b \cdot \sin C$ a og b er hosliggende sider til vinkel C

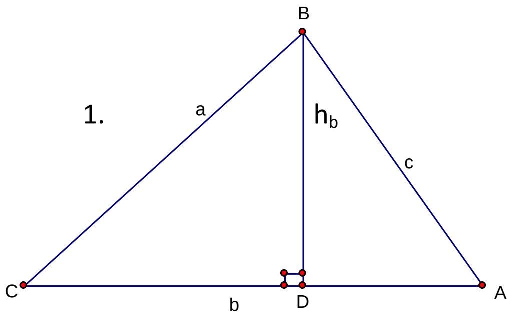
$T = ½ \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ b og c er hosliggende sider til vinkel A

$T = ½ \cdot c \cdot a \cdot \sin B$ a og c er hosliggende sider til vinkel B

Bevis: (video)

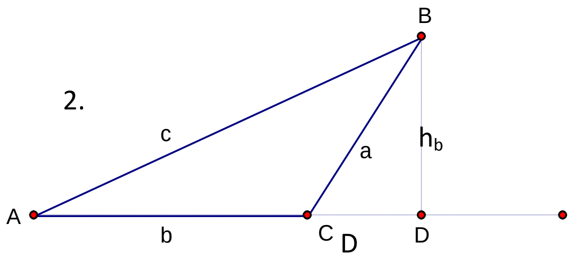
Konstruer en trekant ABC og indtegn højden h_b:

Arealet af trekanten er givet ved $T = ½ \cdot h \cdot g = ½ \cdot h_b \cdot b$



- *Hvis højden falder indenfor trekanten (1):*
  Kig på trekant BCD. Højden h_b kan skrives som

$$\sin C = \frac{h_b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h_b = \sin C \cdot a$$



- *Hvis højden falder uden for trekanten (2):*
  Kig på trekant BCD. Højden h_b kan skrives som

$$\sin(180 - C) = \frac{h_b}{a} \quad \Leftrightarrow$$
$$\sin(180 - C) \cdot a = h_b$$

men da $\sin(180 - C) = \sin C \quad \Rightarrow$
$$h_b = \sin C \cdot a$$

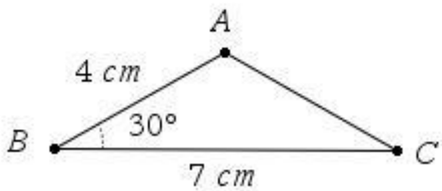
Dette giver nu uanset hvordan højden falder:

$T = ½ \cdot h_b \cdot b = ½ \cdot a \cdot b \cdot \sin C$

Tilsvarende for de to andre. Hermed bevist

Eksempelvis:

I trekant ABC kender vi $|BC| = 7$ og $|AB| = 4$ og vinkel B er 30°. Bestem arealet



$$T = ½ \cdot a \cdot c \cdot \sin(B) = ½ \cdot 7 \cdot 4 \cdot \sin(30) = 7$$

Altså blev arealet fundet til 7.

Lav opgave 225 side 262, opgave 235 side 263 og opgave 236 side 263

Sætning: Sinusrelationerne

I en vilkårlig trekant ABC gælder der at:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Bevis: (video)

For arealet i en trekant gælder at

$T = ½ \cdot a \cdot b \cdot \sin C = ½ \cdot b \cdot c \cdot \sin A = ½ \cdot c \cdot a \cdot \sin B$

Dividere vi igennem med $½ \cdot a \cdot b \cdot c$ får vi

$$\frac{½ \cdot a \cdot b \cdot \sin c}{½ \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{½ \cdot b \cdot c \cdot \sin A}{½ \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{½ \cdot a \cdot c \cdot \sin B}{½ \cdot a \cdot b \cdot c} \Leftrightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Lighedstegnet gælder stadig selvom vi vender alle brøkerne.

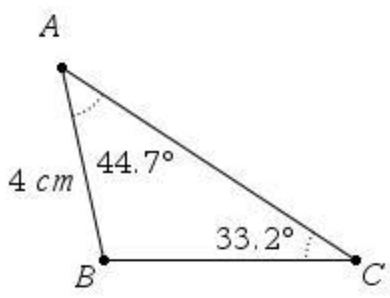
Hermed bevist

Så når vi kender en vinkel og modstående side og en tredje oplysning, så kan vi benytte sinusrelationerne.

Eksempelvis:

I trekant ABC oplyses det at $|AB| = 4$, vinkel A er 44,7° og vinkel C er 33,2°.

Bestem |BC|.



$$\frac{\sin(33.2)}{4} = \frac{\sin(44.7)}{BC}$$

$$\mathrm{BC} = \frac{\sin(44.7) \cdot 4}{\sin(33.2)} = 5.14$$

Altså blev linjen BC fundet til 5.14

I Nspire kunne vi blot taste $solve(\frac{\sin(33.2)}{4} = \frac{\sin(44.7)}{BC}, BC)$

Hvis vi skal bestemme en vinkel med solve, er det vigtigt at huske en betingelse

Eks. $solve\left(\frac{sin(33.2)}{4} = \frac{sin(A)}{5.14}, A\right) | 0 < A \; and \; A < 180$

Lav opgave 232 side 263, opgave 234 side 263, opgave 239 side 263 og opgave 242 side 263

Øvelse: Bevis at alle tre vinkler i en ligesidet trekant er 60°

Sætning: Cosinusrelationerne

I en vilkårlig trekant ABC gælder der at:

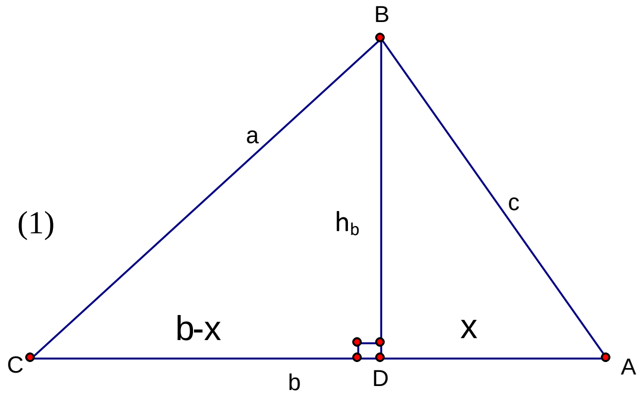
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Bevis: (video)

Vi konstruerer en trekant og rejser en højde.



Hvis højden falder inden i trekanten:

Vi bruger Pythagoras på BCD og opstiller (1)

$$h_b^2 + (b - x)^2 = a^2 \iff h_b^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x = a^2 \quad (1)$$

Vi bruger Pythagoras på ABD og opstiller følgende

$$x^2 + h_b^2 = c^2 \iff h_b^2 = c^2 - x^2$$

Indsætter h_b^2 i (1)

$$c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x = a^2 \iff a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x \qquad (2)$$

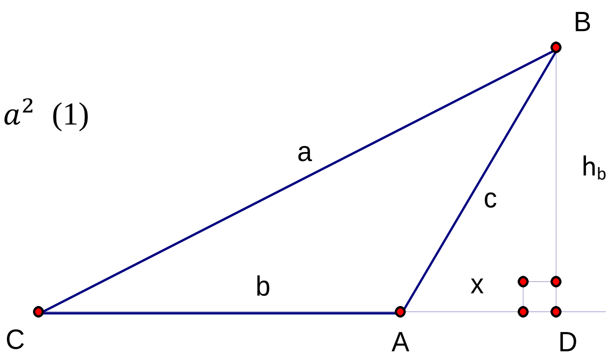
Vi kigger igen på ABD for at slippe af med x

$$\cos A = \frac{x}{c} \iff \cos A \cdot c = x$$

Indsætter x i (2)

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

Hvis højden falder uden for trekanten



Vi bruger Pythagoras på ABD og opstiller (1)

$$h_b^2 + (b + x)^2 = a^2 \iff h_b^2 + b^2 + x^2 + 2 \cdot b \cdot x = a^2 \quad (1)$$

Vi bruger Pythagoras på BCD og opstiller følgende

$$x^2 + h_b^2 = c^2 \iff h_b^2 = c^2 - x^2$$

Indsætter h_b^2 i (1)

$$c^2 - x^2 + b^2 + x^2 + 2 \cdot b \cdot x = a^2 \iff$$

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x \qquad (2)$$

Vi kigger igen på ABD for at slippe af med x

$\cos(180 - A) = \frac{x}{c} \Leftrightarrow \cos(180 - \mathrm{A}) \cdot c = x$

Men da $\cos(180 - v) = -\cos(v)$ får vi at

$-\cos(A) \cdot c = x$

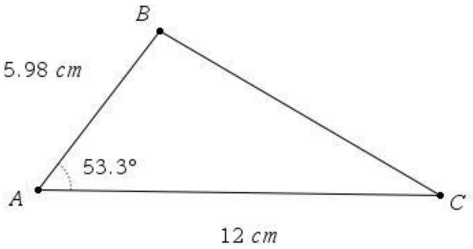
Indsætter x i (2). Hermed får vi $c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

Tilsvarende for de øvrige relationer

Hermed bevist

Eksempelvis

I trekant ABC kender er |AB|=5.98, |AC|=12 og vinkel A=53,3°. Bestem siden |BC|



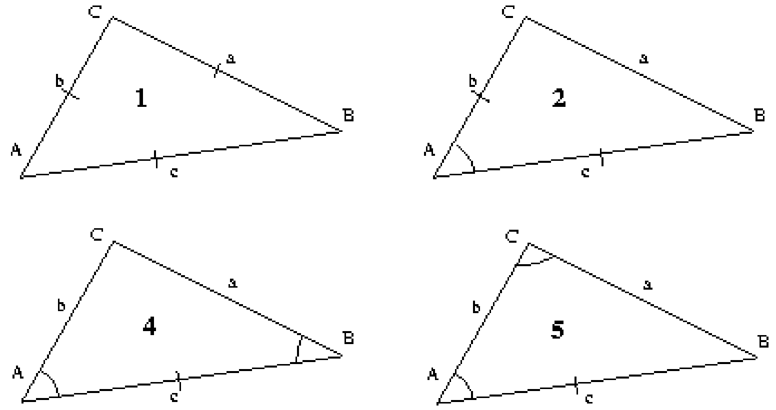
$a^2 = 12^2 + 5.98^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5.98 \cdot \cos(53.3)$

$a = \pm\sqrt{93{,}9892} = \pm 9.69$
da en længde ikke er negativ er $|BC| = 9.69$

Lav opgave 225 side 262 (sider og vinkler), opgave 235 side 263 (sider og vinkler), opgave 240 side 263 og opgave 243 side 263

En tommelfingerregel: Så hvis vi ikke kender en vinkel og den modstående side, så benyttes cosinusrelationerne.

De fem (seks) trekantstilfælde



Tilfælde 1 løses ved: (Nspire)

En vinkel ved cosinusrelationerne

En anden vinkel ved cosinusrelationerne

Den tredje vinkel ved vinkelsum

Tilfælde 4 løses ved: (Nspire)

Den tredje vinkel ved vinkelsum

En anden side ved sinusrelationerne

Sidste side ved sinusrelationerne

Tilfælde 2 løses ved: (Nspire)

Sidste side ved cosinusrelationerne

En anden vinkel ved sinusrelationerne

Den tredje vinkel ved vinkelsum

Tilfælde 5 løses ved: (Nspire)

Den tredje vinkel ved vinkelsum

En anden side ved sinusrelationerne

Sidste side ved sinusrelationerne

Tilfælde 3 løses ved (pas på! Måske flere løsninger): (Nspire)

En vinkel ved sinusrelationerne

Den tredje vinkel ved vinkelsum

Sidste side ved sinusrelationerne

Tilfælde 6 (kan ikke løses)

Tre kendte vinkler. Trekanten kan skaleres uendeligt.

Se link ”Nspire” for at se en mulig konstruktion i Nspire.

Lav opgave 249 side 264, opgave 250 side 264, opgave 251 side 265 og opgave 252 side 265

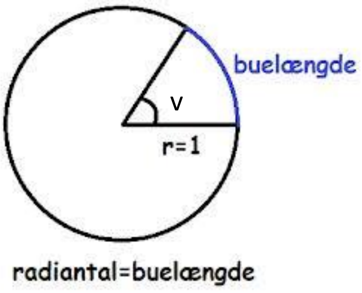
Funktionerne cosinus, sinus og tangens

Radiantal

I forbindelse med beregninger i trekanter stifter vi bekendtskab med cosinus og sinus. For at kigge lidt nærmere på disse størrelser vil vi indfører et nyt vinkelmål i stedet for grader kaldet *radianer* (video).

Definition Ved en vinkels radiantal forstås længden af den bue, den spænder over på en enhedscirkel.

Da omkredsen af enhedscirklen er $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$



Som med grader, må vi kunne løbe flere gange rundt.

Så med lidt hurtig hovedregning, så må

$1° = \dfrac{\pi}{180}$

$20° = \frac{\pi}{9}$

$30° = \frac{\pi}{6}$

$45° = \frac{\pi}{4}$

$90° = \frac{\pi}{2}$

$180° = \pi$

$360° = 2\pi$

$450° = 5\frac{\pi}{2}$

Osv…

Eksempelvis:
Radiantallet til en vinkel på 50° er $50 \cdot \frac{\pi}{180} = 0.8726$.

Så hvis vi indstiller Nspire til radianer så vil $\sin(0.8726) = 0.766$

Hvis vi regner i grader så er $\sin(50) = 0.766$

Kan du se sammenhængen ☺

Bestem radiantallet for 60°, 210°, 113° og opstil en formel for omskrivning af gradtal til radianer.

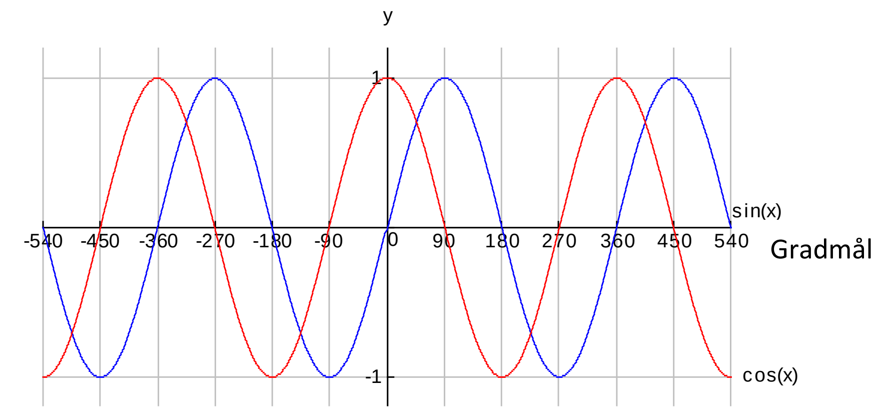
Grafer for Sinus, cosinus og tangens

Vi kan tegne graferne for sinus og cosinus uafhængigt af om vi vælger radianer eller grader, eneste forskel er at x-akserne er forskellige (video).

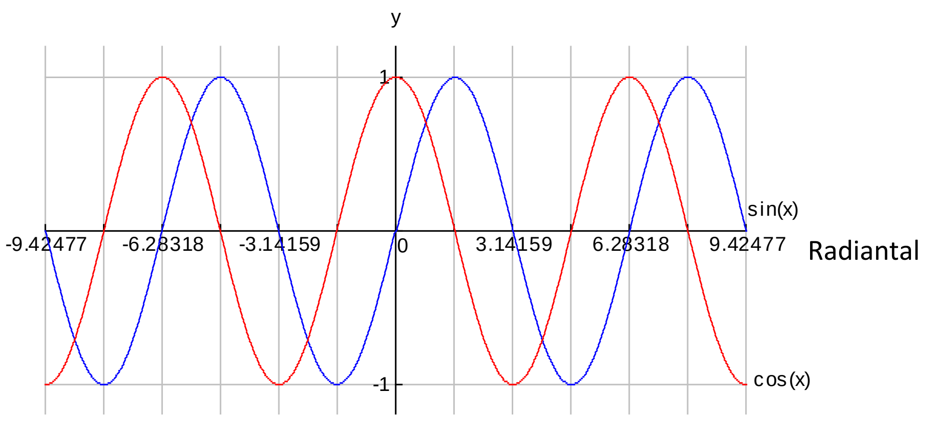
Indstiller vi grafvinduet til grader, så vil en svingning/en periode/en omgang på enhedscirklen være 360°.

Indstiller vi grafvinduet til radianer, så vil en svingning/en periode/en omgang på enhedscirklen være $2\pi \approx 6.28$.

Grader



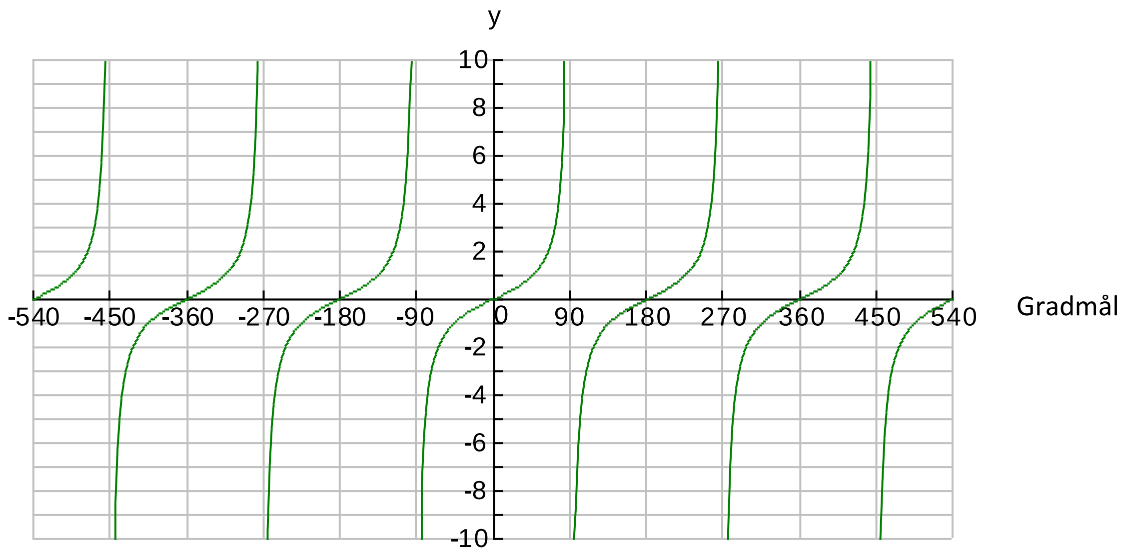
Radianer



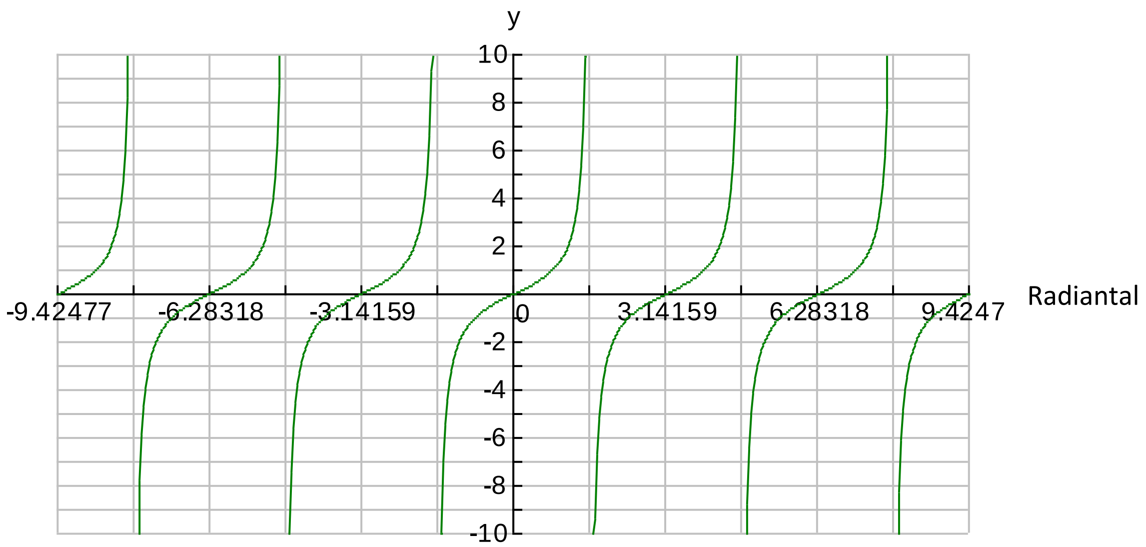
Prøv at omsætte graferne til retningspunkter på enhedscirklen..

Vi kan også tegne tangens som en funktion af x. Her skal vi blot huske på, at da $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, og da vi ikke må dividere med 0, er grafen ikke defineret for cos(x)=0. For hver værdi af x, som ikke er tilladt vil vi se værdierne som asymptoter til grafen.

Grader



Radianer



HUSK: indstil Nspire til den ønskede enhed. En god ide er at regne i grader, og kun skifte til radianer hvis det er påkrævet…. (video)

Sinuskurven generelt

Der gælder generelt for sinuskurven, at den er på følgende form $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$. Dette bruges især i fysikken. (video)

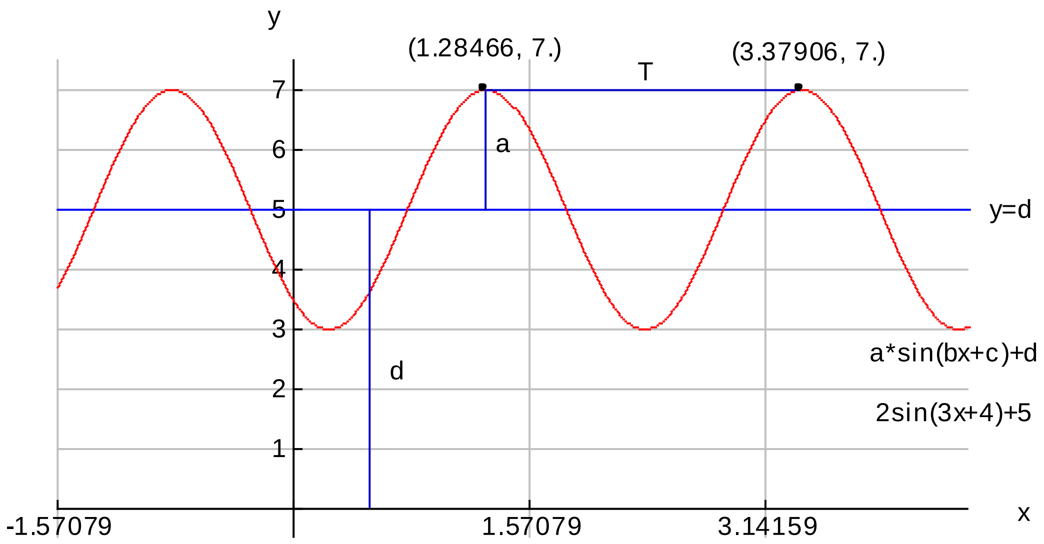
Konstanterne har specielle betydninger i relation til grafens placering og forløb. Vi er med andre ord i stand til at "trække" i kurven og eller flytte den i koordinatsystemet.

Konstanten d har den virkning, at den forskyder sinusgrafen op og ned, og dermed vil grafen svinge symmetrisk omkring $y = d$. Kun når $d = 0$ vil grafen igen svinge omkring x-aksen. Kan bestemmes ved $d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2}$

Konstanten a kaldes for *amplituden* og angiver det maksimale udsving fra symmetriaksen $y = d$ til maksimum på grafen. Kan bestemmes ved $a = \frac{y_{max}-y_{min}}{2}$

Konstanten b kaldes for den *cykliske frekvens*, og der gælder om denne at $b = \frac{2\pi}{T}$. Her er T længden på perioden. Den cykliske frekvens angiver antal svingninger på stykket 2π.

Konstanten c er med til at flytte grafen sidevejs.



Hvis vi eksempelvis har følgende data grundlag:

x	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00
y	-26,0	-11,9	20,0	46,0	46,4	21,5	-10,7	-26,0	-13,0	18,6	47,2

Nu skal vi bestemme konstanterne a, b, c og de.

I Nspire oprettes kunne vi gøre det således.

Jeg opretter to lister til sinrusregressionen

lx:={0,0.4,0.8,1.2,1.6,2.,2.4,2.8,3.2,3.6,4} ▸ {0,0.4,0.8,1.2,1.6,2.,2.4,2.8,3.2,3.6,4}

ly:={-26,-11.9,20,46,46.6,21.5,-10.7,-26,-13,18.6,47.2}
▸ {-26,-11.9,20,46,46.6,21.5,-10.7,-26,-13,18.6,47.2}

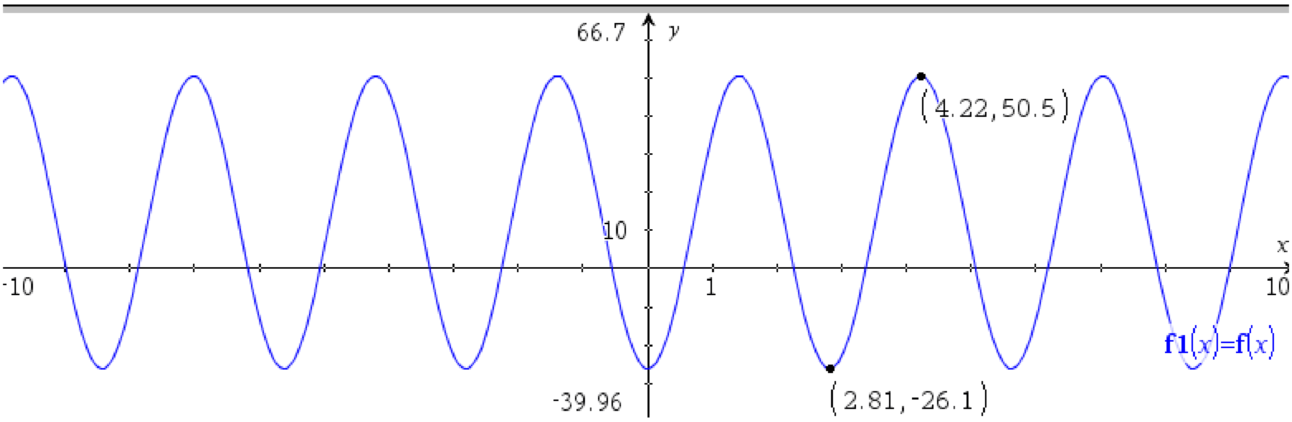
Så foretager jeg regression

SinReg lx,ly::f(x):=stat.RegEqn(x)::f(x) ▸ 38.2916· sin(2.23539· (x−0.706688))+12.1634

Nu kan jeg enten aflæse eller hente mine værdier ud

stat.a ▸ 38.2916 **og stat.b** ▸ 2.23539 **og stat.c** ▸ -1.57972 **ogstat.d** ▸ 12.1634

Perioden kan bestemme via nedenstående graf til *T*=2.81



Altså fik vi følgende værdier:
$a = 38.2916$ og $b = 2.23539$ og $c = -1.57972$ og $d = 12.1634$

Amplituden er 38,29. Den cykliske frekvens er 2.24 (der er altså 2.24 svingninger på 2π). Svingningerne foregår omkring $y = 12{,}16$.

Perioden kan beregnes til $T = 2.81$

Lav øvelse 6.3 side 44 A2, opgave 46 side 56 A2, opgave 48 side 56 A2 og opgave 50 side 56 A2